

Interrogation n°8. Barème sur 24 pts

1) a) [1 pt] Les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

b) [0.5 pt] Les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

2) [1 pt] Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ de rang r . On pose $n = \dim E$. Justifier que le polynôme x^{n-r} divise $\chi_u(x)$.

3) [3 pts] On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \vdots \\ & & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $n \geq 2$ et $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i = n \text{ ou } j = n) \text{ et } i \neq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

a) On pose $m = n - 1$. Montrer que $\chi_A(x) = x^{n-2}(x^2 - m)$.

On pourra sans justification se limiter au cas $x \neq 0$ ou choisir toute autre méthode.

b) Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4) On considère l'endomorphisme $u : K_n[X] \rightarrow K_n[X]$ défini par $u(P) = P'$ (opérateur de dérivation).

a) [0.5 pt] Expliciter *sans justification* la matrice M de u dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$.

b) [1.5 pt] En déduire une base $\mathcal{B}'$ de $K_n[X]$ de la forme $(\lambda_0, \lambda_1 X, \dots, \lambda_n X^n)$ telle que la matrice de u dans cette base $\mathcal{B}'$ soit égale à $(\delta_{i=j-1})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ (les seuls coefficients non nuls valent 1 et sont sur la sur-diagonale).

5) [2.5 pts] On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(K)$.

a) Déterminer une matrice $P \in GL_2(K)$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

b) Donner sans justification *toutes* les matrices $GL_2(K)$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

6) a) [0.5 pt] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A et A^T ont le même polynôme caractéristique, c'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{C}, \det(xI_n - A) = \det(xI_n - A^T)$.

b) [0.5 pt] Montrer que si A et B sont semblables, alors A^T et B^T sont semblables.

b) [1.5 pt] On suppose $\boxed{n = 2}$, c'est-à-dire $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Montrer (en exploitant le cours) que A et A^T sont semblables.

7) Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^p = O_n$.

a) [1 pt] Justifier (par trigonalisation ou autre) que $\chi_N(x) = x^n$.

b) [1.5 pt] Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $NA = O$.

On note a et n les endomorphismes de $E = \mathbb{C}^n$ canoniquement associés respectivement à a et n .

Montrer que $A + N$ et A ont même polynôme caractéristique.

Indication : Se placer une base $\mathcal{B}$ de E bien choisie.

c) [0.5 pt] Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AN = O$. En utilisant l'exercice 6), montrer que $\chi_{A+N} = \chi_A$.

8) [1 pt] Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$, avec $\boxed{p \neq n}$. Justifier que $\det(AB)\det(BA) = 0$.

9) [1 pt] Soient A et $B \in GL_n(\mathbb{C})$ deux matrices **inversibles**, avec $n \geq 1$.

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que la matrice $A - \lambda B$ n'est pas inversible.

10) On considère l'endomorphisme $u : \mathbb{C}_n[X] \rightarrow \mathbb{C}_n[X]$ défini par $u(P) = P'$ (opérateur de dérivation).

a) [1.5 pt] Soit F un sev de $\mathbb{C}_n[X]$ distinct de $\{0\}$. On suppose que F est stable par u .

Justifier qu'il existe $k = \max\{\deg P \mid P \in F \setminus \{0\}\}$ et montrer que $F = \mathbb{C}_k[X]$.

b) [0.5 pt] En déduire sans justification *tous* les sev de F stables par u .

11) Soit $A = (A_1, A_2, \dots, A_n) = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_n(K)$. On note $(E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de K^n .

a) [0.5 pt] Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Calculer $\beta_j = \det(E_1, \dots, E_{j-1}, A_j, E_{j+1}, \dots, E_n)$.

b) [1 pt] On considère la forme n -linéaire $f : K^n \times K^n \times \dots \times K^n \rightarrow K$ définie par

$$\forall (X_1, X_2, \dots, X_n) \in K^n \times K^n \times \dots \times K^n, \quad f(X_1, \dots, X_n) = \sum_{j=1}^n \det(X_1, \dots, X_{j-1}, A_j, X_{j+1}, \dots, X_n)$$

Montrer que f est alternée.

c) [0.5 pt] En déduire que $\forall (X_1, \dots, X_n) \in K^n \times \dots \times K^n, \quad f(X_1, \dots, X_n) = (\text{tr } A) \det(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

12) a) [1 pt] Soit u un endomorphisme diagonalisable.

Montrer (avec le th de la base incomplète) que tout sev F de E admet un supplémentaire stable par u .

b) [1.5 pt] (★) Réciproquement, soit u un endomorphisme tel que tout sev admet un supplémentaire stable.

Montrer que u est diagonalisable.