

Interrogation n°7. Corrigé

1) On développe selon la première colonne. On a $d_n = x C_1 + (-1)^{n-1} (-y) C_n$,

$$\text{avec } C_1 = \begin{vmatrix} x & -y & & 0 \\ 0 & x & -y & \\ & 0 & x & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \end{vmatrix} = x^{n-1} \text{ et } C_n = \begin{vmatrix} -y & 0 & & \\ x & -y & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & x & -y \end{vmatrix} = (-y)^{n-1}, \text{ donc } d_n = x^n - y^n.$$

Autre méthode : En supposant $x \neq 0$, on ajoute à la j -ième colonne la précédente multipliée par yx^{-1} , pour j de 2 à n .

2) a) On a $(\operatorname{ch} t) = O_{+\infty}(e^{-t})$, donc $(\operatorname{ch} t) \exp(-tx^2) = O_{+\infty}(\exp(-\alpha t))$, où $\alpha = x^2 - 1 > 0$.

Donc $t \mapsto (\operatorname{ch} t) \exp(-tx^2)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

b) On pose $f(t, x) = (\operatorname{ch} t) \exp(-tx^2)$.

- Les applications $x \mapsto f(t, x)$ sont de classe C^1 sur $]1, +\infty[$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = -2xt(\operatorname{ch} t) \exp(-tx^2)$

- On sait par a), $t \mapsto f(t, x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. De même pour $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$, car $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = O_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$

- Domination : soit $[a, b] \subset]1, +\infty[$.

On a $\forall x \in [a, b]$, $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right| \leq 2bt(\operatorname{ch} t) \exp(-ta^2) = \varphi(t)$, et φ intégrable sur $\mathbb{R}$.

Donc g est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$, et $\forall x > 1$, $g'(x) = \int_0^{+\infty} -2xt(\operatorname{ch} t) \exp(-tx^2) dt$.

3) L'application linéaire associée à A est $a : K^p \rightarrow K^n \quad X \mapsto AX$.

Alors $F = \operatorname{Ker} a$, donc par le théorème du rang, $\dim F = p - r$, où $r = \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} a$.

4) a) On a $\operatorname{Im}(a + b) \subset \operatorname{Im} a + \operatorname{Im} b$, donc $\operatorname{rg}(A + B) = \operatorname{rg}(a + b) \leq \dim(\operatorname{Im} a + \operatorname{Im} b) \leq \operatorname{rg} a + \operatorname{rg} b = \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B$.

b) Par a), $\operatorname{rg}(a) \leq \operatorname{rg}(a + b) + \operatorname{rg}(-b) = \operatorname{rg}(a + b) + \operatorname{rg}(b)$. car $\operatorname{Im}(-b) = \operatorname{Im}(b)$.

Donc $\operatorname{rg}(a + b) \geq \operatorname{rg}(a) - \operatorname{rg}(b)$. Comme a et b jouent un rôle symétrique, $\operatorname{rg}(a + b) \geq |\operatorname{rg}(a) - \operatorname{rg}(b)|$.

5) *Remarque* : A est la matrice $(E_n, 2E_1, \dots, nE_{n-1})$.

On a $u(E_j) = j E_{j-1 \bmod n}$, donc u est bijective (l'image d'une base est une base).

$$\text{On a } u^{-1}(E_j) = \frac{1}{j+1} E_{j+1} \text{ si } j < n, \text{ et } u^{-1}(E_n) = E_1, \text{ donc } A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1/n & 0 \end{pmatrix}.$$

Variante : $u(x_1, \dots, x_n) = (x_n, 2x_1, \dots, nx_{n-1})$, donc $u^{-1}(y_1, \dots, y_n) = \left(\frac{y_2}{2}, \dots, \frac{y_n}{n}, y_1\right)$.

6) a) On considère $P = \left(\begin{array}{c|c} I_r & -A^{-1}C \\ \hline O_{p-r,r} & I_{p-r} \end{array} \right)$, et ainsi $MP = \left(\begin{array}{c|c} A & O \\ \hline O & B \end{array} \right)$.

b) Comme P est inversible, $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg} \left(\begin{array}{c|c} A & O \\ \hline O & B \end{array} \right)$.

Or, $\operatorname{Vect}(E_1, \dots, E_r) \oplus \operatorname{Vect}(E_{r+1}, \dots, E_p)$. Donc $\operatorname{Im} \left(\begin{array}{c} A \\ O \end{array} \right)$ et $\operatorname{Im} \left(\begin{array}{c} O \\ B \end{array} \right)$ sont en somme directe.

Donc $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg} \left(\begin{array}{c|c} A & O \\ \hline O & B \end{array} \right) = \operatorname{rg} \left(\begin{array}{c} A \\ O \end{array} \right) + \operatorname{rg} \left(\begin{array}{c} O \\ B \end{array} \right) = \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B = r + \operatorname{rg} B$, car $A \in GL_r(K)$.

7) a) On a $\text{rg } A = p$, donc $(A_1, \dots, A_p)$ est libre, famille qu'on peut donc compléter en une base de $\mathbb{R}^n$ en lui ajoutant certains des vecteurs de la base canonique (qui est bien une famille génératrice finie).

b) On fait apparaître les pivots, on note Γ l'ensemble des indices i de ligne contenant un pivot.

On prend alors $\Delta = \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \Gamma$. Ici, on a $n = 5$, $\Gamma = \{1, 3, 4\}$ et donc on peut prendre $\Delta = \{2, 5\}$:

$$\text{En effet, } \text{rg}(A_1, A_3, A_4, E_2, E_5) = 5, \text{ car } (A_1, E_2, A_3, A_4, E_5) = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 1 & \boxed{1} & 0 \\ 1 & 1 & \boxed{1} \\ 1 & 1 & 1 & \mathbf{1} \end{pmatrix} . \text{ inversible.}$$

Remarque culturelle : Comme toute matrice A se met sous forme angulaire inférieure en opérant sur les colonnes, on peut ainsi prouver matriciellement le théorème de la base incomplète.

8) a) La famille $(X^k(X-1))_{1 \leq k \leq n-1}$ est une base de G .

En effet, l'application $\phi : Q \rightarrow X(X-1)Q$ est un isomorphisme de $K_{n-2}[X]$ sur G .

On obtient donc une base en considérant l'image de la base canonique $(1, X, \dots, X^{n-2})$ par ϕ .

On a $F \oplus G = E$ par la propriété de division euclidienne par $X(X-1)$: tout polynôme s'écrit de façon unique sous la forme $P = R + X(X-1)Q$, où $R \in \text{Vect}(1, X)$ et $\deg Q \leq n-2$.

b) Considérons la base $\mathcal{B} = (1, X) \cup (X^k(X-1))_{1 \leq k \leq n-1}$ et $\mathcal{C} = (1)$ base de K .

Alors $\varphi \in \Delta$ ssi $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} \varphi = (a \ b \ 0 \ \dots \ 0)$.

Ainsi, Δ s'identifie par l'**isomorphisme** $\varphi \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} \varphi$ au sev des matrices de la forme $(a \ b \ 0 \ \dots \ 0)$.

On obtient donc l'isomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur Δ , qui à (a, b) associe φ définie par $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} \varphi = (a \ b \ 0 \ \dots \ 0)$.

Donc Δ est un sev et $\dim \Delta = 2$.

Remarque : On pourrait aussi bien sûr montrer d'abord que Δ est un sev (stable par combinaison linéaire), mais la caractérisation matricielle précédente donne directement ce résultat (et la dimension avec).

c) Les formes linéaires φ_0 et φ_1 sont indépendantes et appartiennent à Δ . Donc par dimension, $\Delta = \text{Vect}(\varphi_0, \varphi_1)$.

Variante : $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} \varphi_0 = (1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} \varphi_1 = (1 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0)$, et ces matrices engendrent $\{(a \ b \ 0 \ \dots \ 0)\}$.

Remarque : Cette propriété est liée aux relations entre interpolation de Lagrange et division euclidienne : le reste de la division euclidienne de P par $X(X-1)$ est le polynôme d'interpolation de P en 0 et 1.

9) a) On a $A = \sum_{(k,l)} a_{kl} E_{kl}$, donc $AE_{ij} = \sum_{(k,l)} a_{kl} \delta_{l=i} E_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ki} E_{kj}$.

Autrement dit, AE_{ij} est la matrice dont les colonnes sont nulles, sauf la j -ième qui vaut A_i .

b) On a donc $AE_{ij} = \sum_{k=1}^i a_{ki} E_{kj}$ car $\forall k > i, a_{ki} = 0$.

On considère donc la base canonique $(E_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ en classant les E_{ij} par valeur croissante de i (à j fixé) de sorte que les E_{kj} apparaissent avant E_{ij} lorsque $k \leq i$.

10) a) Il s'agit de prouver que toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(K)$ est combinaison linéaire de matrices inversibles.

Il suffit par linéarité de prouver que les E_{ij} appartiennent à $\text{Vect}(GL_n(K))$.

Or, $E_{ij} = (I_n + E_{ij}) - I_n$ la différence de deux matrices inversibles. Donc $E_{ij} \in \text{Vect}(GL_n(K))$.

Variante : On sait que $M = PJ_rQ$, avec P et $Q \in GL_n(K)$, et $r = \text{rg } M$.

On note que $J_r = (I_n + J_r) - (I_n)$ et que $I_n + J_r$ et I_n sont inversibles.

Donc $M = P(I_n + J_r)Q - PQ$ est la différence de deux matrices inversibles. Donc $\text{Vect}(GL_n(K)) = \mathcal{M}_n(K)$.

b) On a $\forall P \in GL_n(K)$, $AP = PA$. Par linéarité en P et par a), on obtient $\forall P \in \mathcal{M}_n(K)$, $AP = PA$.

En particulier, $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $AE_{ij} = E_{ij}A$, d'où $a_{ii} = a_{jj}$ et $\forall k \neq i$, $a_{ik} = 0$. Donc $A = \lambda I_n$.

11) a) $(v_i - v_j) = (v_i - v_1) - (v_j - v_1)$, donc $F = \text{Vect}(v_i - v_1)_{1 \leq i \leq n} = \text{Vect}(v_i - v_1)_{2 \leq i \leq n}$.

Donc $\dim F = \text{rg}(v_i - v_1)_{2 \leq i \leq n} \leq n - 1$.

b) Il suffit de trouver k telle l'application linéaire $\varphi_k : F \rightarrow H_k$ $x \mapsto p_k(x)$ soit injective

(en effet, pour $i \neq j$, le vecteur $v_j - v_i$ n'est pas nul, donc on aura bien $\varphi(v_j) \neq \varphi(v_i)$).

Or, $\text{Ker } \varphi_k = F \cap (\text{Ker } p_k) = F \cap \mathbb{R}e_k$. Il suffit donc de trouver k tel que $F \oplus \mathbb{R}e_k$.

Si on avait $e_k \in F$ pour tout k , alors $E = F$, ce qui contredirait $\dim F < n$. Donc k existe.