

Interrogation n°7. Barème sur 24 pts.

1) [2 pts] Soient x et $y \in \mathbb{C}$. On considère le déterminant d'ordre n défini par

$$d_n = \begin{vmatrix} x & -y & 0 & & 0 \\ 0 & x & -y & & \\ & 0 & x & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & -y \\ -y & 0 & & 0 & x \end{vmatrix} = \det(xI_n - yA), \text{ où } a_{ij} = \delta_{i=(j-1) \bmod n}$$

Calculer d_n .

2) On considère $\forall x > 1, g(x) = \int_0^{+\infty} (\operatorname{ch} t) \exp(-tx^2) dt$.

a) [1 pt] Montrer que $g(x)$ est bien définie pour tout réel $x > 1$.

b) [2.5 pts] Montrer que g est de classe C^1 .

3) [1 pt] Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$.

On note $F = \{X \in K^p \mid AX = 0\}$ le sev des $X \in K^p$ tels que $\boxed{AX = 0}$ (vecteur nul de K^n).

On pose $r = \operatorname{rg} A$. Exprimer sans justification $\dim F$ (en fonction de n, p et r).

4) [2 pts] Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(K)$. On note a et b les endomorphismes de K^n associés à A et B .

a) Montrer que $\operatorname{rg}(A + B) \leq \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B$.

b) Montrer que $\operatorname{rg}(A + B) \geq |\operatorname{rg} A - \operatorname{rg} B|$.

5) [1 pt] On considère la matrice $A = (j \delta_{i=j-1 \bmod n})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On note $u : K^n \rightarrow K^n$ l'endomorphisme associé à A . Calculer A^{-1} .

6) Soit $M = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline O_{n-r,r} & B \end{array} \right) \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ où $\boxed{A \in GL_r(K)}$ matrice carrée inversible d'ordre r .

a) [1 pt] Expliciter une matrice de la forme $P = \left(\begin{array}{c|c} I_r & * \\ \hline O_{p-r,r} & I_{p-r} \end{array} \right)$ telle que $MP = \left(\begin{array}{c|c} A & O_{r,p-r} \\ \hline O_{n-r,r} & B \end{array} \right)$.

b) [1 pt] A-t-on nécessairement $\operatorname{rg} M = r + \operatorname{rg} B$?

7) [2 pts]

a) Soit $A = (A_1, \dots, A_p) \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ une matrice $\boxed{\text{de rang } p}$. On pose $\boxed{r = n - p}$.

On note $(E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de K^n . Justifier (avec le cours) qu'il existe une partie $\Delta \subset \{1, 2, \dots, n\}$ de cardinal r telle que $(A_1, \dots, A_p) \cup (E_j)_{j \in \Delta}$ est une base de K^n .

b) On prend ici $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Expliciter une valeur possible de Δ .

8) Soit $n \geq 2$. On considère dans $E = K_n[X]$ les sev $F = \text{Vect}(1, X)$ et $G = \{X(X-1)Q, Q \in K_{n-2}[X]\}$.

Ainsi, G est l'ensemble des multiples de $X(X-1)$ dans E .

a) [1.5 pt] Donner une base de G et justifier (par une propriété connue) que $F \oplus G = E$.

b) [1 pt] On note Δ l'ensemble des formes linéaires $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall P \in G, \varphi(P) = 0$.

Justifier que Δ est un sev (de $\mathcal{L}(E, K)$) et déterminer $\dim \Delta$.

Conseil : Considérer $\varphi \mapsto L = \text{Mat}_{\mathcal{B},1} \varphi$ où L est la matrice de φ dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à $F \oplus G = E$.

On peut alors *en même temps* prouver que Δ est un sev et déterminer sa dimension.

c) [1 pt] On considère φ_0 et $\varphi_1 : E \rightarrow \mathbb{R}$ définies par $\varphi_0(P) = P(0)$ et $\varphi_1(P) = P(1)$. Montrer que $\Delta = \text{Vect}(\varphi_0, \varphi_1)$.

9) On considère $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_n(K)$

a) [1 pt] On note $E_{ij} \in \mathcal{M}_n(K)$ les matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(K)$.

Expliciter la matrice AE_{ij} en fonction des coefficients de A et des matrices canoniques E_{kl} .

b) [1.5 pt] On suppose A triangulaire supérieure.

On considère l'endomorphisme $u : \mathcal{M}_n(K) \rightarrow \mathcal{M}_n(K)$ défini par $u(M) = AM$.

Proposer une base de $\mathcal{M}_n(K)$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}} u$ est triangulaire supérieure.

10) a) [1.5 pt] Montrer que $\text{Vect}(GL_n(K)) = \mathcal{M}_n(K)$.

b) [1 pt] Soit $A \in GL_n(K)$.

On suppose que A n'est semblable qu'à elle-même, c'est-à-dire $\forall P \in GL_n(K), P^{-1}AP = A$.

Montrer qu'il existe $\lambda \in K$ tel que $A = \lambda I_n$.

Suggestion : Faire intervenir les équations $AE_{ij} = E_{ij}A$.

11) Soient $v_1, \dots, v_n$ des vecteurs de $E = \mathbb{R}^n$. On pose $F = \text{Vect}(v_i - v_j)_{1 \leq j < i \leq n}$.

a) [1 pt] Montrer que $\dim F \leq n - 1$.

b) [1 pt] (★) (*Oral X*)

On suppose que les vecteurs $v_1, \dots, v_n$ sont deux à deux distincts.

On considère $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de E .

Pour $1 \leq k \leq n$, on note p_k la projection sur $H_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{k-1}, e_{k+1}, \dots, e_n)$ parallèlement à $\mathbb{R}e_k$.

Montrer qu'il existe k tel que les vecteurs $p_k(v_1), p_k(v_2), \dots, p_k(v_n)$ sont deux à deux distincts.