

Interrogation n°6. Barème sur 24 pts

A l'exception de la question 1) de l'exercice A, on ne mentionnera que les hypothèses de domination lors de l'utilisation de la convergence dominée ou des théorèmes sur les intégrales paramétrées.

Exercice A

Soit $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux (donc bornée), où $a > 0$. On pose $\forall x > 0$, $L(x) = \int_0^a f(t) e^{-tx} dt$.

1) [2.5 pts] On suppose de plus que f est continue en 0 et que $f(0) \neq 0$.

Montrer que $L(x) \sim \frac{f(0)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Indication : Utiliser un changement de variable et considérer les intégrales sur $[0, +\infty[$.

2) [1 pt] On suppose $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$.

En utilisant 1), montrer brièvement que $L(x) \sim \frac{f'(0)}{x^2}$.

3) [1 pt] En utilisant 1), déterminer un équivalent de $g(x) = \int_0^{\pi/4} \exp(-x \tan t) dt$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice B. Intégrales paramétrées semi-convergentes

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue. On considère, si elle existe, $L(x) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-tx} dt$

1) [1.5 pt] On suppose f intégrable sur $[0, +\infty[$. Montrer que L est définie et continue sur $[0, +\infty[$.

2) On suppose **désormais** qu'il existe $\int_0^{+\infty} f(t) dt = \lim_{a \rightarrow +\infty} F(a)$, où $F(a) = \int_0^a f(t) dt$.

a) [1 pt] Montrer que $\forall x > 0$, $L(x) = x \int_0^{+\infty} F(t) e^{-tx} dt$.

b) [1.5 pt] Montrer que L est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.

c) [1.5 pt] Montrer en utilisant un changement de variable que L est continue sur $[0, +\infty[$.

Exercice C. Deux exemples d'intégration terme à terme

1) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\sum \frac{1}{|a_n|}$ converge.

On admet que la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-a_n x}$ est définie et continue sur $]0, +\infty[$.

a) [0.5 pt] Justifier l'existence de $\lambda = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a_n}$.

b) [1.5 pt] Montrer que $\int_0^{+\infty} f(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a_n}$.

2) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de réels strictement positifs telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$.

a) [0.5 pt] Justifier l'existence de $\lambda = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a_n}$.

b) [1.5 pt] On admet que la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-a_n x}$ est définie et continue sur $]0, +\infty[$.

Montrer que $\int_0^{+\infty} f(x) dx = \lambda$.

Exercice D. Produit de convolution

Soient f et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications continues.

1) [2.5 pts] On suppose f intégrable et g bornée.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t) dt}$ est bien définie.

b) Montrer que $f * g$ est continue sur $\mathbb{R}$.

c) On suppose de plus $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$. On pose $\forall \lambda > 0, \forall t \in \mathbb{R}, f_\lambda(t) = \lambda f(\lambda t)$.

On pose $G_\lambda(x) = (f_\lambda * g)(x)$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} G_\lambda(x) = g(x)$.

2) [2 pts] On suppose f à support compact : il existe un segment $[\alpha, \beta]$ tel que $\forall t \notin [\alpha, \beta], f(t) = 0$.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t) dt$ est bien définie.

b) Montrer que $f * g$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice E. Rang d'une composée

Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $r = \text{rg}(AB)$.

1) [1.5 pt] Montrer que $r = \text{rg}(A) + \dim(\text{Ker } A + \text{Im } B) - n$.

2) *Question supplémentaire (oral ENS)*

On pose $p = \text{rg } A$ et $q = \text{rg } B$. Montrer que $\max(0, p + q - n) \leq r \leq \min(p, q)$.

Exercice F. Les deux questions sont indépendantes

1) a) [1 pt] Soit $(Z_1, \dots, Z_n)$ une base du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $E = \mathbb{C}^n$.

Montrer que $(Z_1, \dots, Z_n, iZ_1, \dots, iZ_n)$ est une base du $\boxed{\mathbb{R}\text{-espace vectoriel}}$ $E = \mathbb{C}^n$.

b) [0.5 pt] Préciser sans justification la dimension d de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ comme $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

2) a) [1 pt] Soient $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $Y = (y_1, \dots, y_n)$ deux vecteurs non nuls de K^n .

On pose $M = XY^T \in \mathcal{M}_n(K)$. Exprimer $\text{Im } M$ et $\text{Ker } M$ en fonction de X et de Y^T .

b) [1.5 pt] Soient $(X_1, \dots, X_n)$ et $(Y_1, \dots, Y_n)$ des bases de K^n .

On pose $M_{ij} = X_i Y_j^T \in \mathcal{M}_n(K)$. Montrer que $(M_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(K)$.