

Interrogation n°5. Corrigé

1) a) Si $\alpha > \frac{1}{2}$, $w_n = O\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$, où $1 < \beta < 2\alpha$, donc $\sum w_n$ converge.

Si $\alpha \leq \frac{1}{2}$, $w_n \geq \frac{1}{n}$ pour n assez grand, donc $\sum w_n$ diverge.

b) On a $\ln\left(1 + \frac{(-1)^n \ln n}{n}\right) = \frac{(-1)^n \ln n}{n} - \varepsilon_n$, avec $\varepsilon_n \sim \frac{(\ln n)^2}{2n^{2\alpha}}$.

- La série $\sum \varepsilon_n$ converge ssi $\alpha > \frac{1}{2}$.

- La série $\sum \frac{(-1)^n \ln n}{n}$ converge par le critère des séries alternées :

En effet, $\left(\frac{\ln t}{t}\right)_{t \geq 3}$ tend vers 0 et est décroissante, car on a $\frac{d}{dt}\left(\frac{\ln t}{t}\right) = -\frac{\ln t}{t^2} + \frac{1}{t^2} \leq 0$ pour $t \geq e$.

- Donc la série $\sum u_n$ converge ssi $\alpha > \frac{1}{2}$.

2) a) La suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et converge vers 0, donc $\sum (-1)^n R_n$ converge pour tout $\alpha > 1$.

b) Par comparaison entre séries et intégrales, on a $R_n \geq \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{n}}$, car $t \mapsto \frac{1}{t^{3/2}}$ décroît.

Donc la série à termes positifs $\sum R_n$ diverge.

3) a) Pour $n \geq n_0$ assez grand, $|u_n| \leq 1$, donc $\forall n \geq n_0$, $(u_n)^2 \leq |u_n|$ et $\sum u_n^2$ converge.

b) Contre-exemple : $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge, mais $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

4) a) On fixe $x \geq 0$. On a : $\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right) = \frac{x}{n(n+x)} \sim \frac{x}{n^2}$, donc $\sum \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$ converge.

b) $\sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}\right) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{p} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+p}$ par télescopage. Donc $f(p) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{p} \sim \ln p$.

Remarque : Pour x réel, on a $f(p) \leq f(x) \leq f(p+1)$, où $p = \lfloor x \rfloor$, car f est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Comme $\ln(p+1) = \ln p + \ln(1 + 1/p)$, alors $\ln(p+1) \sim \ln p$ lorsque p tend vers $+\infty$.

Lorsque x tend vers $+\infty$, alors p tend vers $+\infty$. Par pincement, on a donc $f(x) \sim_{+\infty} \ln x$.

Ce résultat peut aussi être obtenu directement par une comparaison avec une intégrale :

On a $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(n+x)}$ et on compare $f(x)$ avec $\int_1^{+\infty} \frac{x}{t(t+x)} dt = \left[\ln\left(\frac{t}{t+x}\right) \right]_{t=1}^{t=+\infty} = \ln(x+1) \sim_{+\infty} \ln x$.

5) a) On a $I_n = \left[\frac{t}{(1+t^3)^n} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{3nt^3}{(1+t^3)^{n+1}} = 0 + 3n(I_n - I_{n+1})$, car $t^3 = (1+t^3) - 1$.

b) On a $(\ln u_{n+1} - \ln u_n) = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(\frac{I_{n+1}}{I_n}\right) + \frac{1}{3} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

On a $\ln\left(\frac{I_{n+1}}{I_n}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right) = -\frac{1}{3n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et que $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Donc $(\ln u_{n+1} - \ln u_n) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, et ainsi, $\sum (\ln u_{n+1} - \ln u_n)$ converge.

On en déduit que la suite $(\ln u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\mu \in \mathbb{R}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lambda = e^\mu$.

On en conclut $I_n \sim \lambda n^{-1/3}$.

6) a) La série $\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ vérifie le CSSA (car $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \geq 1}$ décroît vers 0), alors $|R_n| \leq a_{n+1}$.

Donc a fortiori $\lim_{n \rightarrow +\infty} nR_n = 0$.

a) On a $a_n = R_{n-1} - R_n$.

Donc $\sum_{k=1}^n k a_k = \sum_{k=1}^n k(R_{k-1} - R_k) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)R_k - \sum_{k=0}^n k R_k = \sum_{k=0}^{n-1} R_k - n R_n$.

La série $\sum n a_n = \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est la série harmonique alternée dont la somme connue vaut $\ln 2$.

Donc $\sum R_n$ converge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} R_k = 0 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n k a_k = \ln 2$.

7) a) $F(n) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{2t+n} - \frac{1}{2t+n+1} \right) dt = \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{2t+n}{2t+n+1} \right) \right]_0 = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \sim \frac{1}{2n}$.

b) En regroupant dans la série alternée les termes deux à deux, on a $R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2k+n} - \frac{1}{2k+1+n} \right)$.

La fonction $\varphi : t \mapsto \frac{1}{2t+n} - \frac{1}{2t+1+n} = \frac{1}{(2t+n)(2t+1+n)}$ est décroissante.

Donc $F(n) \leq R_n \leq F(n) + \varphi(0)$, où $\varphi(0) = \frac{1}{n(n+1)}$. Variante : $F(n) \leq R_n \leq F(n-2)$.

Remarque : Par pincement, on en déduit donc $R_n \sim \frac{1}{2n}$.

8) a) $A_n = (-1)^n a_n$, où $a_n = \int_0^1 \sin(\pi\theta) f(n+\theta) d\theta \geq 0$.

Comme f est décroissante, $f(n+1+\theta) \leq f(n+\theta)$, donc $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante.

Enfin, on a $0 \leq a_n \leq f(n)$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

b) Par a), la série $\sum A_n$ converge. Soit $x \geq 0$. Posons $n = \lfloor x \rfloor$.

On a $\left| J(x) - \sum_{k=0}^{n-1} A_k \right| = \left| \int_n^x \sin(\pi t) f(t) dt \right| \leq f(n) \rightarrow 0$ lorsque x tend vers $+\infty$.

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} J(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_k$. On sait que $0 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} A_k \leq A_0 = f(0) \int_0^1 \sin(\pi t) dt = \frac{2}{\pi} f(0)$.

9) a) Posons $S_n = \ln P_n = \sum_{k=0}^n \ln(a_k)$.

Comme $\sum (1 - a_n)$ converge, alors a fortiori $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$.

Comme $\ln(1+x) \sim x$ en $x=0$ et que $\ln(a_n) = \ln(1 + (a_n - 1))$, alors $|\ln(a_n)| \sim |1 - a_n|$.

Donc par comparaison, $\sum \ln(a_n)$ converge absolument vers un réel λ . Et $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \exp(\lambda)$.

b) On a $|1 - |z|| \leq |1 - z|$ par la seconde inégalité triangulaire, c'est-à-dire $|1 - \rho| \leq |1 - z|$.

c) On considère $z_n = \rho_n e^{i\theta_n} = x_n + iy_n$, avec $\theta_n \in]-\pi, \pi]$. On a $P_n = (\prod_{k=0}^n \rho_k) \exp(i \sum_{k=0}^n \theta_k)$.

On va prouver que $\prod \rho_n$ converge vers un réel non nul ρ et que $\sum_{k=0}^n \theta_k$ converge vers un réel θ .

On conclut alors (par continuité de $\exp$) le résultat souhaité : $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \rho e^{i\theta} \neq 0$.

Or, $\prod \rho_n$ vérifie les propriétés du a) : $\rho_n \neq 0$ et $\sum |1 - \rho_n|$ converge, car par b), $|1 - \rho_n| \leq |1 - z_n|$.

D'autre part, $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = 1$, donc pour n assez grand, $\operatorname{Re}(z_n) > 0$ et $\theta_n = \arctan \left(\frac{y_n}{x_n} \right)$.

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$, donc $\arctan \left(\frac{y_n}{x_n} \right) \sim y_n$.

Comme $|y_n| = |\operatorname{Im}(1 - z_n)| \leq |1 - z_n|$, alors $\sum y_n$ converge absolument, donc $\sum \theta_n$ converge absolument.

10) On a $|u_n u_{n+1}| \leq \frac{1}{2}(u_n^2 + u_{n+1}^2)$, donc $\sum u_n u_{n+1}$ converge absolument.