

Interrogation n°5. Barème sur 23.5 pts

On rappelle que :

- le critère de d'Alembert est au programme officiel
- le critère de Raabe-Duhamel et les séries de Bertrand ne sont pas au programme officiel.
- La convergence absolue est valable dans $\mathbb{C}$: Si $\sum |z_n|$ converge (dans $\mathbb{R}$), alors $\sum z_n$ converge (dans $\mathbb{C}$).

1) a) [2 pts] Soit $\boxed{\alpha > 0}$. Déterminer la nature (cv ou div) de la série $\sum w_n$, où $\boxed{w_n = \frac{(\ln n)^2}{n^{2\alpha}}}$.

b) [2.5 pts] On pose $u_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n \ln n}{n^\alpha} \right)$. Déterminer une CNS sur $\alpha > 0$ pour que $\sum u_n$ converge.

2) On pose $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$. Les questions a) et b) sont indépendantes.

a) [1 pt] Montrer que la série $\sum (-1)^n R_n$ converge.

b) [1 pt] En comparant R_n avec une intégrale, montrer que la série $\sum R_n$ diverge.

3) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

a) [1 pt] On suppose que la série $\sum |u_n|$ converge. Montrer que la série $\sum u_n^2$ converge.

b) [1 pt] On suppose que la série $\sum u_n$ converge. La série $\sum u_n^2$ converge-t-elle nécessairement ?

Si *Vrai*, donner une démonstration ; si *Faux*, donner un contre-exemple.

4) [2 pts] Pour tout réel positif x , on considère $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$.

a) Justifier que pour tout $x \geq 0$, $f(x)$ est bien défini (c'est-à-dire que la série converge).

b) Pour tout $\boxed{p \in \mathbb{N}}$, calculer $f(p)$ en l'exprimant par une somme finie.

En déduire *sans justification* un équivalent simple de $f(p)$ lorsque p tend vers $+\infty$.

5) On considère $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}$.

a) [1 pt] En utilisant une IPP, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = 3n(I_n - I_{n+1})$. On en déduit donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{3n} \right) I_n.$$

b) [2 pts] En considérant $u_n = n^{1/3} I_n$, montrer qu'il existe $\lambda > 0$, tel que $I_n \sim \frac{\lambda}{n^{1/3}}$.

Indication : Considérer $\sum (\ln u_{n+1} - \ln u_n)$.

6) On considère $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}}$.

a) [1 pt] Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} nR_n = 0$.

b) [1 pt] Montrer que $\sum_{k=1}^n k a_k = \sum_{k=0}^{n-1} R_k - nR_n$.

En déduire (à l'aide d'une série connue) que $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n = \ln 2$.

7) [2 pts] On considère $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+n}$, c'est-à-dire $R_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \dots$

a) Calculer $F(n) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{2t+n} - \frac{1}{2t+n+1} \right) dt$ et en déduire $F(n) \sim \frac{1}{2n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

b) Exprimer *sans justification* R_n comme la somme d'une série à *termes positifs*.

Proposer *sans justification* un encadrement de R_n où intervient $F(n)$.

Indication : Noter que $\varphi : t \mapsto \frac{1}{2t+n} - \frac{1}{2t+n+1} = \frac{1}{(2t+n)(2t+n+1)}$ décroît sur $\mathbb{R}^+$.

8) Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, décroissante et convergeant vers 0. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n = \int_n^{n+1} f(t) \sin(\pi t) dt$.

a) [1 pt] Montrer que la série $\sum A_n$ vérifie le critère spécial des séries alternées.

Suggestion : On pourra faire intervenir $a_n = \int_0^1 f(n+t) \sin(\pi t) dt$.

b) [1.5 pt] En déduire que $J(x) = \int_0^x f(t) \sin(\pi t) dt$ converge en $+\infty$ et que $\left| \int_0^{+\infty} f(t) \sin(\pi t) dt \right| \leq \frac{2}{\pi} f(0)$.

9) a) [1 pt] Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle *strictement positive* telle que $\sum |1 - a_n|$ converge.

On pose $P_n = \prod_{k=0}^n a_k$. Montrer que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel λ *non nul*.

b) [0.5 pt] Soit $z = \rho e^{i\theta}$ un nombre complexe. Montrer que $|1 - \rho| \leq |1 - z|$.

c) [1.5 pt] Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes non nuls telle que la série $\sum |1 - z_n|$ converge.

On pose $P_n = \prod_{k=0}^n z_k$. Montrer que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un nombre complexe z *non nul*.

Indication : On posera $z_n = x_n + iy_n = \rho_n e^{i\theta_n}$ avec $\theta_n \in]-\pi, \pi]$.

Pour n assez grand, on pourra exprimer θ_n en utilisant $\arctan(y_n/x_n)$.

10) [0.5 pt] Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

On suppose que la série $\sum (u_n)^2$ converge. Montrer que $\sum u_n u_{n+1}$ converge.