

Interrogation n°4. Corrigé.

1) En 1, avec $t = 1 + h$, on a $f(t) = \frac{(\ln t)^\alpha}{(t-1)^2} \sim \frac{h^\alpha}{h^2}$. Donc $\int_1^2 f$ converge ssi $\alpha > 1$.

En $+\infty$, $\frac{(\ln t)^\alpha}{(t-1)^2} \sim \frac{(\ln t)^\alpha}{t^2} = O_{+\infty} \left(\frac{1}{t^{3/2}} \right)$. Donc $\int_2^{+\infty} f$ converge. D'où la CNS : $\alpha > 1$.

2) a) On a par IPP : $\int_1^x \frac{\cos t}{t^\alpha} dt = \left[\frac{\sin t}{t^\alpha} \right]_1^x + \alpha \int_1^x \frac{\sin t}{t^{\alpha+1}} dt$.

Or, $\frac{\sin t}{t^{\alpha+1}} = O_{+\infty} \left(\frac{1}{t^{\alpha+1}} \right)$ et $(\alpha+1) > 1$, donc $t \mapsto \frac{\sin t}{t^{\alpha+1}}$ est intégrable (par comparaison).

Donc $J(\alpha)$ existe et vaut $\sin 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha+1}} dt$.

b) Pour $K(\beta)$, on utilise le changement de variable $u = t^\beta$, c'est-à-dire $t = u^{1/\beta}$ et $dt = \frac{1}{\beta} u^{1/\beta-1}$.

L'application $\varphi : u \mapsto u^{1/\beta}$ est une bijection de classe C^1 de $[1, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$.

D'où $\int_1^x \cos(t^\beta) dt = \frac{1}{\beta} \int_1^{x^\beta} \frac{\cos(u)}{u^{1-1/\beta}} du$ qui tend vers $\frac{1}{\beta} J(\alpha)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$, avec $\alpha = 1 - \frac{1}{\beta} > 0$.

Donc $K(\beta)$ converge.

3) On a $J(n) = K(n, n)$, avec $K(n, m) = \int_0^1 t^n (\ln t)^m dt$.

En intégrant par parties, on a $K(n, m) = \frac{-m}{n+1} \int_0^1 t^n (\ln t)^{m-1} dt = \frac{-m}{n+1} K(n, m-1)$ pour $m \in \mathbb{N}^*$.

Remarque : En toute rigueur, il faut faire une IPP sur des segments $[\varepsilon, 1]$, puis on fait $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

Donc $K(n, n) = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^n} K(n, 0) = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$, car $K(n, 0) = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$.

Variante : Avec $t = e^{-u}$, on a : $J(n) = (-1)^n \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)u} u^n du = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}} \int_0^1 e^{-y} y^n dy = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$.

4) a) Posons $f(t) = t^{x-1}(1-t)^{y-1}$. On a $f(t) \sim t^{x-1}$ en $t = 0$ et $f(t) \sim (1-t)^{y-1}$.

D'où la CNS : f est intégrable sur $]0, 1[$ ssi $x > 0$ et $y > 0$.

b) On a $B(x, y) = B(y, x)$: par le changement de variable $u = 1 - t$, $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt = -\int_1^0 (1-u)^{x-1} u^{y-1} du$.

c) Par IPP successives, on a : $B(x, n+1) = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n-1)} \int_0^1 t^{x+n-1} dt = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$.

d) On a $J = [\arcsin(t)]_{-1}^1 = \pi$.

On a $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t-t^2}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1/4 - (t-1/2)^2}} = \int_0^1 \frac{2 dt}{\sqrt{1 - (2t-1)^2}} = \int_0^1 \frac{d(2t-1)}{\sqrt{1 - (2t-1)^2}}$.

L'application $t \mapsto u = (2t-1)$ est une bijection affine de $[0, 1]$ sur $[-1, 1]$.

On a ainsi $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = J = \pi$.

5) $\frac{1}{(t+1)(t+2)} = \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2}$. Donc $J = \left[\ln \left(\frac{t+1}{t+2} \right) \right]_0^{+\infty} = -\ln \left(\frac{1}{2} \right) = \ln 2$.

6) On a $|f(t)| \leq \frac{1}{2} \left(t^2 f(t)^2 + \frac{1}{t^2} \right)$ qui est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc par comparaison, f est intégrable.

7) a) $R(x) = K - \int_0^x f(t)dt$. Par le th fondamental, R est de classe C^1 et $R'(x) = -f(x)$.

b) L'application R est strictement décroissante et est une bijection de classe C^1 de $[0, +\infty[$ sur $]0, K]$.

On effectue le changement de variable $u = R(t)$. On a $du = -f(t) dt$.

Donc $\int_0^{+\infty} \frac{f(t) dt}{R(t)^\alpha} = \int_0^K \frac{du}{u^\alpha}$ qui converge ssi $\alpha < 1$.

c) On a $|R(x)| \leq \int_x^{+\infty} \left| \frac{g(t)}{t} \right| dt \leq \frac{1}{x} \int_x^{+\infty} |g(t)| dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$ car g intégrable.

On a par IPP, $\int_0^x R(t) dt = [tR(t)]_0^x - \int_0^x tR'(t) dt = xR(x) + \int_0^x tf(t) dt = xR(x) + \int_0^x g(t) dt$.

En faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient bien : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x R(t) dt$ existe et vaut $\int_0^{+\infty} g(x) dx$.

8) On a $\int_0^x (f(t+1) - f(t)) dt = \int_1^{x+1} f(t) dt - \int_0^x f(t) dt = \int_x^{x+1} f(t) dt - \int_0^1 f(t) dt$.

Or, en posant $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\int_x^{x+1} f(t) dt$ converge vers L lorsque x tend vers $+\infty$.

En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, on a pour x assez grand, $L - \varepsilon \leq f(t) \leq L + \varepsilon$ pour tout $t \in [x, x+1]$.

D'où $L - \varepsilon \leq \int_x^{x+1} f(t) dt \leq L + \varepsilon$ pour x assez grand.

Donc $\int_0^{+\infty} (f(t+1) - f(t)) dt$ converge vers $L - \int_0^1 f(t) dt$.

9) On a $\int_0^x f(t) \cos(\lambda t) dt = \frac{1}{\lambda} [f(t) \sin(\lambda t)]_0^x - \frac{1}{\lambda} \int_0^x f'(t) \sin(\lambda t) dt$.

Le terme $\frac{1}{\lambda} [f(t) \sin(\lambda t)]_0^x = \frac{1}{\lambda} f(x) \sin(\lambda x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

La fonction f' est intégrable, car $\int_0^x |f'(t)| dt = -\int_0^x f'(t) dt = f(0) - f(x) \rightarrow f(0)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

D'où l'existence de $J(\lambda)$, et on a aussi $J(\lambda) = -\frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} f'(t) \sin(\lambda t) dt$.

Donc $|J(\lambda)| \leq \frac{K}{\lambda}$, avec $K = \int_0^{+\infty} |f'(t)| dt = f(0)$.

10) a) Soit $p \in \mathbb{N}$.

Par une IPP, $|\int_0^{p\pi} \cos(nt) f(t) dt| = \frac{1}{n} |\int_0^{p\pi} \sin(nt) f'(t) dt|$. Donc $|J(n)| \leq \frac{1}{n} \int_0^{p\pi} |f'(t)| dt + \int_{p\pi}^{+\infty} |f(t)| dt$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\int_{p\pi}^{+\infty} |f(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{2}$, car f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Et pour n assez grand, $\frac{1}{n} \int_0^{p\pi} |f'(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{2}$, donc $|J(n)| \leq \varepsilon$. D'où on déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} J(n) = 0$.

b) Remarque : En fait, a) reste vraie si on suppose f continue par morceaux (au lieu de f de classe C^1).

Contre-exemple : On considère f définie par morceaux :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [(p-1)\pi, p\pi], \quad f(t) = \cos(pt)$$

On a $\int_{(p-1)\pi}^x \cos(pt) dt = \frac{1}{p} \sin(px)$. En particulier, $\int_{(p-1)\pi}^{p\pi} \cos(pt) dt = 0$.

Donc la primitive $F(x) = \int_0^x f(t) \, dt$ vérifie $F(p\pi) = 0$ et $\sup_{[(p-1)\pi, p\pi]} |F| \leq \frac{\pi}{p}$. Donc $\lim_{+\infty} F = 0$.

Mais $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{+\infty} \cos(nt) f(t) \, dt = \frac{\pi}{2}$.

car $\int_{(p-1)\pi}^{p\pi} \cos(nt) \cos(pt) \, dt = \frac{1}{2} \int_{(p-1)\pi}^{p\pi} \cos((n+p)t) + \cos(n-p)t \, dt = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq p \\ \pi/2 & \text{si } n = p \end{cases}$