

Interrogation n°4. Barème sur 23.5 pts

Remarque : Lorsque l'existence des limites est évidente, on pourra utiliser *directement* les intégrations par parties sur des intervalles quelconques.

On rappelle que les intégrales de Bertrand ne sont pas supposées connues (car hors-programme officiel).

1) [3 pts] Déterminer une CNS sur le réel α pour que l'intégrale $J = \int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)^\alpha}{(t-1)^2} dt$ converge.

2) [2.5 pts] Soient des réels $\alpha > 0$ et $\beta > 1$.

a) Démontrer l'existence de l'intégrale $J(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^\alpha} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{\cos t}{t^\alpha} dt$.

b) En utilisant a), démontrer la convergence de $K(\beta) = \int_1^{+\infty} \cos(t^\beta) dt$.

3) [2 pts] Calculer la valeur de $J(n) = \int_0^1 t^n (\ln t)^n dt$ pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$.

Remarque : Il n'est pas demandé de justifier l'existence des intégrales considérées.

4) On considère $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$.

a) [1 pt] Donner une CNS sur x et y pour que $B(x, y)$ existe. Justifier *brièvement* votre réponse.

Dans la suite, ces conditions sont supposées vérifiées. Les questions b), c) et d) sont indépendantes.

b) [0.5 pt] Comparer $B(x, y)$ et $B(y, x)$ et justifier en donnant *sans détailler* l'argument essentiel.

c) [1.5 pt] Donner *sans justification* la valeur de $B(x, n+1)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout réel x valide.

d) [2 pts] (★) Que vaut $J = \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$? En déduire la valeur de $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Indication : Utiliser une bijection affine $\varphi : t \mapsto u$ de $[0, 1]$ sur $[-1, 1]$.

5) [1 pt] Calculer $J = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+2)}$.

6) [1 pt] Soit $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\int_1^{+\infty} t^2 f(t)^2 dt < +\infty$. Montrer que f est intégrable sur $[1, +\infty[$.

7) Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue et strictement positive. On suppose que $K = \int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge.

On pose $\forall x \in [0, +\infty[, R(x) = \int_x^{+\infty} f(t) dt$. Les questions b) et c) sont indépendantes.

a) [1 pt] Montrer que R est de classe C^1 et calculer $R'(x)$.

b) [1.5 pt] On suppose ici f strictement positive. Ainsi, R est à valeurs strictement positives.

En utilisant a), montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{R(t)^\alpha} dt$ converge ssi $\alpha < 1$.

c) [2 pts] On suppose $f(x) = \frac{g(x)}{x}$, avec g intégrable.

Montrer que $R(x) = \mathfrak{o}_{+\infty} \left(\frac{1}{x} \right)$ puis montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} R(x) \, dx$ existe et vaut $\int_0^{+\infty} g(x) \, dx$.

8) [2 pts] (★) Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, positive et convergeant en $+\infty$ vers un réel L .

Montrer que $\int_0^{+\infty} (f(t+1) - f(t)) \, dt$ converge.

9) [1.5 pt] Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , décroissante, positive et convergeant vers 0 en $+\infty$.

Justifier pour tout $\lambda > 0$ l'existence de $J(\lambda) = \int_0^{+\infty} f(t) \cos(\lambda t) \, dt$ et montrer que $|J(\lambda)| \leq \frac{f(0)}{\lambda}$.

10) a) [1.5 pt] (★) Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ intégrable et de classe C^1 .

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J(n) = \int_0^{+\infty} \cos(nt) f(t) \, dt$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} J(n) = 0$.

b) (★★) [*Question hors-interrogation*]

Montrer que la propriété est fausse si on suppose seulement $\int_0^{+\infty} f(t) \, dt$ semi-convergente.