

Interrogation n°3. Corrigé

1) a) $(n+1)^\alpha - (n+1)^\alpha = n^\alpha \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\alpha \right) = n^\alpha \left(1 + \frac{2\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)$, donc $u_n \sim 2\alpha n^{\alpha-1}$.

Remarque : Par le TAF appliqué à $f(x) = x^\alpha$, on a $u_n = f'(x_n) = 2\alpha x_n^{\alpha-1} \sim 2\alpha n^{\alpha-1}$, car $x_n \sim n$.

b) Avec $x = 1 + h$, on a $f(1+h) = \frac{\ln(1+h)}{1+(1+h)^3} = h \frac{1 - \frac{1}{2}h + o(h)}{2+3h+o(h)} = \frac{h}{2} \frac{1 - \frac{1}{2}h + o(h)}{1 + \frac{3}{2}h + o(h)}$.

En mettant h en facteur, on se ramène à calculer un DL à l'ordre 1.

Donc $f(1+h) = \frac{1}{2}h \left(1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)h + o(h) \right) = \frac{1}{2}h - h^2 + o(h)$.

Autrement dit, $f(x) = \frac{1}{2}(x-1) - (x-1)^2 + o_1((x-1)^2)$.

c) On a $\cos(x) \exp(x) = \operatorname{Re}(\exp(\lambda x))$, où $\lambda = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$.

Le coefficient c_n en x^n du DL(0) vaut $c_n = \operatorname{Re}\left(\frac{\lambda^n}{n!}\right)$, c'est-à-dire $c_n = \frac{2^{n/2}}{n!} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$.

2) Posons $L = f'(0)$. Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = L$, alors tout choix $a < L < b$ convient.

3) a) Comme $f > 0$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Si elle convergait vers un réel L , on aurait $L = L + f(L)$ par continuité de f , ce qui contredit $f(L) \neq 0$.

Donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

b) On a $x_{n+1}^\alpha = x_n^\alpha \left(1 + \frac{f(x_n)}{x_n} \right)^\alpha = x_n^\alpha \left(1 + \frac{\lambda}{x_n} + o\left(\frac{1}{x_n}\right) \right)^\alpha = x_n^\alpha \left(1 + \frac{\alpha\lambda}{x_n} + o\left(\frac{1}{x_n}\right) \right) = x_n^\alpha + \alpha\lambda + o(1)$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_{n+1}^\alpha - x_n^\alpha) = \alpha\lambda$. Par Césàro, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} x_n^\alpha = \alpha\lambda$, c'est-à-dire $x_n^\alpha \sim \alpha\lambda n$ et $x_n \sim (n\alpha\lambda)^{1/\alpha}$.

4) a) On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à $\exp$ en 0 à l'ordre n sur $[0, x]$:

Donc $|e^x - P_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [0, x]} e^t$. Par croissances comparées, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$.

On en déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) = e^x$.

b) La fonction $x \mapsto P_n(x)$ définit une bijection strictement croissante de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$.

c) On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) = e^x$. On peut donc conjecturer $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lambda$, où $e^\lambda = 2$, c'est-à-dire $\lambda = \ln 2$.

Montrons $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lambda^+$. Soit $\varepsilon > 0$.

On a $P_n(\lambda) < e^\lambda = 2 = P_n(x_n)$, donc $\lambda < x_n$.

D'autre part, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(\lambda + \varepsilon) = e^{\lambda + \varepsilon} > 2$, donc $P_n(\lambda + \varepsilon) > 2 = P_n(x_n)$ pour n assez grand.

Donc pour n assez grand, $x_n < \lambda + \varepsilon$. Ce qui prouve la conjecture.

5) Par les sommes de Riemann, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln T_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \ln(1+t) dt$.

Or $\int \ln(1+t) dt = (1+t) \ln(1+t) - \int dt = (1+t) \ln(1+t) - t$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = 2 \ln 2 - 1$.

6) a) On a par récurrence $u_n \geq 1$, donc $n + u_n \geq 1$, donc $u_{n+1} \leq n + u_n$, et ainsi $u_n = O(n^2)$.

b) On a $u_{n+1} = \sqrt{O(n^2)} = O(n)$, c'est-à-dire $u_n = O(n)$. Donc $u_{n+1} = \sqrt{O(n)} = O(\sqrt{n})$. Ainsi, $u_n = O(\sqrt{n})$.

c) Comme $u_n = O(\sqrt{n})$, on a $u_{n+1} = \sqrt{n + u_n} = \sqrt{n} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{u_n}{n} \right) = \sqrt{n} + O_{+\infty}(1)$, d'où $u_n \sim \sqrt{n}$.

Donc $u_{n+1} = \sqrt{n + \sqrt{n} + o(\sqrt{n})} = \sqrt{n} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{n}}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) = \sqrt{n} + \frac{1}{2} + o_{+\infty}(1)$.

7) a) On a : $\frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{x + x^2/2 + x^3/6 + \mathfrak{o}(x^3)} = \frac{1}{1 + u}$, avec $u = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \mathfrak{o}(x^2)$.

Or, $\frac{1}{1 + u} = 1 - u + u^2 + \mathfrak{o}(u^2) = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} + \frac{x^2}{4} + \mathfrak{o}(x^2)$.

Donc $\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + \mathfrak{o}(x^2)$.

b) Posons $g(x) = \frac{e^x - 1}{x}$. On a $f(x)g(x) = 1$. Or, on a $g(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{(k+1)!} + \mathfrak{o}(x^n)$.

Le terme en x^n du $DL_n(0)$ de $f(x)g(x)$ vaut donc $c_n = \sum_{k=0}^n \frac{a_{n-k}}{(k+1)!}$.

Par unicité du $DL_n(0)$, on a $c_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = 0$.

8) a) $G(x)$ est bien définie car $[x, x^2]$ est inclus dans $]1, +\infty[$, intervalle où f est bien continue.

b) On note F une primitive de f sur $]1, +\infty[$. Ainsi, F est de classe C^1 comme primitive d'une fonction C^1 .

On a donc $G(x) = F(x^2) - F(x)$.

Ainsi, G est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$, et $G'(x) = 2xf(x^2) - f(x) = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}$.

c) Posons $t = 1 + h$. On a $\frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1} = \frac{h - \ln(1+h)}{h \ln(1+h)} \sim \frac{h^2/2}{h^2} = \frac{1}{2}$. Donc $L = \frac{1}{2}$.

d) Pour $1 < x \leq \sqrt{\alpha}$, on a $[x, x^2] \subset]1, \alpha]$.

Donc $\left| G(x) - \int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1} \right| \leq \int_x^{x^2} \left| \frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1} \right| dt \leq \int_x^{x^2} 1 dt = x^2 - x$, qui tend vers 0 lorsque $x \rightarrow 1^-$.

D'autre part, $\int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1} = \int_x^{x^2} \ln(t-1) dt = \ln(x+1)$, qui tend vers $\ln 2$ lorsque $x \rightarrow 1^-$.

On en conclut que $G(x)$ converge vers $\ln 2$ lorsque $x \rightarrow 1^-$.

e) On prolonge G par continuité en 1 par $G(1) = \ln 2$. Par b), on a $\lim_{x \rightarrow 1, x > 1} G'(x) = 1$, car $\ln(1+h) \sim_0 h$. Par le th du prolongement C^1 , G est de classe C^1 sur $[1, +\infty[$, et $G'(1) = 1$.

9) a) Posons $g(x) = f(x) e^{-\mu x}$. On obtient donc $\frac{g(x+1)}{g(x)} \leq 1$, c'est-à-dire $g(x+1) \leq g(x)$.

Tout réel $x \geq a$ s'écrit sous la forme $x = n + r$, où $r \in [a, a+1[$.

D'où $\forall x \geq a$, $g(x) = g(r+n) \leq g(r) \leq K$, où $K = \sup_{[a, a+1]} g$ (qui existe, car g continue).

On en conclut que $f(x) \leq K e^{\mu x}$.

b) On considère $L < \mu < \lambda$. Il existe $b \geq a$ telle que $\forall x \geq b$, $\frac{f(x+1)}{f(x)} \leq \mu = e^{\ln \mu}$.

Par a), il existe K tel que $\forall x \geq b$, $f(x) \leq K e^{x \ln \mu} = K \mu^x$. Comme $\mu < \lambda$, $f(x) = \mathfrak{o}_{+\infty}(\lambda^x)$.

10) Δ est fermé comme intersection de fermés, Δ est non vide.

Donc il existe $y = \max \Delta$. On a $y \in A$ ouvert, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[y - \varepsilon, y + \varepsilon] \subset A$.

On a donc nécessairement $y = x$. En effet, sinon, on pourrait trouver $z \in A$ tel que $z > y$.

Ainsi, $x \in A$. Donc A contient tous les éléments $x \geq a$.

En procédant de même avec $\Delta = [x, +\infty[\cap A$ lorsque $x < a$, on montre que A contient tous les $x \leq a$.