

Interrogation n°3. Barème sur 23.5 pts

1) Les questions sont indépendantes

a) [0.5 pt] Donner *sans justification* un équivalent de $u_n = (n+1)^\alpha - (n-1)^\alpha$ lorsque n tend vers $+\infty$.

b) [1 pt] Déterminer le DL à l'ordre 2 en $\boxed{x=1}$ de $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^3}$.

c) [1 pt] En utilisant $e^{\lambda x}$ où $\lambda \in \mathbb{C}$, calculer le coefficient c_n en x^n du $DL_n(0)$ de $\cos(x) \exp(x)$.

2) [1 pt] Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(0) = 0$.

Indiquer *sans justification* pour quelles valeurs de a et b on a toujours $ax \leq f(x) \leq bx$ au voisinage de 0^+ .

Remarque : Le terme “toujours” signifie que la propriété est vraie pour *toute* fonction f vérifiant les hypothèses.

3) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et **strictement positive**. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite vérifiant $x_{n+1} = x_n + f(x_n)$.

a) [1 pt] Déterminer la limite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

b) [2 pts] On suppose $f(x) \sim_{+\infty} \lambda x^{1-\alpha}$, avec $\lambda > 0$ et $\alpha > 0$. En utilisant $(x_n^\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$, montrer que $x_n \sim (\alpha \lambda n)^{1/\alpha}$.

4) On pose $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$.

a) [1 pt] En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) = e^x}$.

b) [0.5 pt] Justifier *brièvement* que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel $x > 0$ tel que $\boxed{P_n(x) = 2}$.

c) [2 pts] On note x_n le réel défini au b). Déterminer $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ et justifier votre réponse.

5) [1.5 pt] Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$, où $T_n = \left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right) \right)^{1/n}$.

6) On considère $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{n + u_n}$.

a) [0.5 pt] Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq n + u_n$. On en déduit que $u_n = O(n^2)$.

b) [1 pt] Montrer que $u_n = O(\sqrt{n})$.

c) [1 pt] Montrer ensuite que $u_n = \sqrt{n} + \frac{1}{2} + o_{+\infty}(1)$.

7) Les deux questions sont indépendantes.

a) [1.5 pt] Déterminer le DL $\boxed{\text{à l'ordre 2}}$ en $x = 0$ de $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$.

b) [1.5 pt] On sait par le cours de sup que $f : x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$ admet un DL en 0 à tout ordre n .

On considère les coefficients de ce développement limité : $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$.

Montrer (sans chercher à calculer le DL !) que pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\sum_{k=0}^n \frac{a_{n-k}}{(k+1)!} = 0$.

8) On considère pour tout réel $\boxed{x > 1}$, $G(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.

Remarque : Pour la suite, on pose $\forall t > 1$, $f(t) = \frac{1}{\ln t}$, et on note F une primitive de f sur $]1, +\infty[$.

a) [0 pt] Justifier que l'intégrale définissant $G(x)$ est bien définie pour tout $x > 1$.

b) [1 pt] Montrer que G est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$ et que $\forall x > 1$, $G'(x) = \frac{x-1}{\ln x}$.

c) [0.5 pt] Déterminer $L = \lim_{t \rightarrow 1, t > 1} \left(\frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1} \right)$.

On en déduit (*admis ici*) qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall t \in]1, \alpha]$, $\left| \frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1} \right| \leq 1$.

d) [1 pt] En utilisant c), montrer que $\lim_{x \rightarrow 1, x > 1} G(x) = \ln 2$.

e) [0.5 pt] Justifier brièvement que G admet un prolongement de classe C^1 en $x = 1$.

9) a) [1.5 pt] Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue strictement positive telle que $\frac{f(x+1)}{f(x)} \leq e^\mu$, avec $\mu \in \mathbb{R}$.

Montrer qu'il existe une constante K telle que $\forall x \in [a, +\infty[$, $f(x) \leq K e^{\mu x}$.

Suggestion : Se ramener par un changement de fonction au cas $\mu = 0$.

b) [1 pt] Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue strictement positive telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = L > 0$.

Montrer que pour tout $\lambda > L$, on a $f(x) = o_{+\infty}(\lambda^x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

10) [1 pt] (★) Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide à la fois ouverte et fermée. Montrer que $A = \mathbb{R}$.

Indication : Il existe $a \in A$. Pour $x \geq a$, considérer $\Delta =]-\infty, x] \cap A$.