

Interrogation n°2. Barème sur 24 pts

1) [1 pt] Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

On pose $\Delta = f'(I)$ et $D = \left\{ \frac{f(x) - f(y)}{x - y}, x < y \text{ et } (x, y) \in I^2 \right\}$ l'ensemble des pentes.

Montrer que $D \subset \Delta \subset \overline{D}$.

2) Les deux questions sont indépendantes.

a) [0.5 pt] Déterminer une primitive $F(x)$ de $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ sur $[0, +\infty[$.

b) [1.5 pt] En utilisant notamment un changement de variable, calculer $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1}$.

3) [2.5 pts] Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 , croissante, et telle que $f(0) = f'(0) = 0$ et $\lambda = f''(0) > 0$.

a) Donner sans justification des équivalents de $f(x)$ et de $f'(x)$ lorsque x tend vers 0^+ .

b) Montrer que $g : x \mapsto \sqrt{f(x)}$ est définie et de classe C^1 sur $[0, 1]$ et donner la valeur de $g'(0)$.

4) [1 pt] Soit $p \in \mathbb{N}$ un entier fixé. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^p$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

En utilisant les sommes de Riemann, déterminer un équivalent de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

5) [1 pt] Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application définie sur un intervalle réel I . Soient $a < b < c$ dans I .

Pour $x < y$ dans I , on pose $\Delta(x, y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$.

Montrer que $\Delta(a, c)$ est une valeur moyenne (pondérée) des pentes $\Delta(a, b)$ et $\Delta(b, c)$.

6) [2.5 pts] On pose $A = \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z} = \{\alpha + \beta\sqrt{2}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2\}$. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

a) On pose $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = (\sqrt{2} - 1)^n$. On sait que $a_n \in A$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$. Montrer que tout réel x est adhérent à A en explicitant *sans justification* une suite d'éléments de A convergeant vers x .

b) On suppose que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x+1)$. Montrer (brièvement) que f est bornée et atteint ses bornes.

c) On suppose que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x+1) = f(x+\sqrt{2})$. Montrer (brièvement) que f est constante.

7) a) [1.5 pt] Soit $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ un polynôme complexe de degré $n \geq 1$, avec $P(0) = a_0 \neq 0$.

On suppose que $\sum_{k=1}^n |a_k| \leq |a_0|$. Montrer que toute racine complexe z de P vérifie $|z| \geq 1$.

b) [1 pt] Soit $Q(X) = \sum_{k=0}^n b_k X^k$ un polynôme réel de degré $n \geq 1$ tel que $b_0 \geq b_1 \geq \dots \geq b_n > 0$.

Montrer que toute racine complexe z de Q vérifie $|z| \geq 1$.

Indication : Considérer le polynôme $P(X) = (X-1)Q(X)$.

8) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et strictement positive, avec $a < b$. On a donc $M = \int_a^b f(t) dt > 0$.

a) [1 pt] Montrer que pour tout $\theta \in [0, 1]$, il existe un unique réel $x \in [a, b]$ tel que $\int_a^x f(t) dt = \theta M$.

On note $x(\theta)$ ce réel. On obtient ainsi une application $x : [0, 1] \rightarrow [a, b]$.

b) [1.5 pt] Justifier (avec le cours de sup sur les bijections réciproques) que x est de classe C^1 et que

$$\forall \theta \in [0, 1], \quad x'(\theta) = \frac{M}{f(x(\theta))}$$

9) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe de classe C^1 telle que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

a) [1 pt] Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f'(x_0) = 0$.

b) [0.5 pt] Montrer que $f(x_0) = \inf f$.

On pose désormais $\Delta = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = f(x_0)\}$.

b) [1.5 pt] Montrer que Δ est un segment.

10) [2 pts] Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et dérivable en 0, vérifiant $f(0) = f(1) = 0$ et $f'(0) > 0$.

Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que $f(a) = 0$ et $\forall x \in]0, a[, f(x) > 0$.

11) [2.5 pts] Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle positive vérifiant $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, u_{n+m} \leq u_n + u_m$.

a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $n = pq + r$ la division euclidienne de n par p .

Montrer qu'il existe un réel M_p tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{u_n}{n} \leq \frac{u_p}{p} + \frac{M_p}{n}$.

b) Justifier l'existence de $L = \inf_{n \geq 1} \frac{u_n}{n}$, puis montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = L$, où $L = \inf_{n \geq 1} \frac{u_n}{n}$.

12) Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . On pose $\boxed{M = \sup |f'|}$.

a) [1 pt] On considère $[a, b] \subset [0, 1]$. Montrer que $\left| \int_a^b f(t) dt - (b-a)f(b) \right| \leq \frac{1}{2}(b-a)^2 M$.

b) [0.5 pt] On considère une subdivision $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ de $[0, 1]$, c'est-à-dire $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$.

Le pas de la subdivision est $\Delta = \max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1})$.

Montrer que $\sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})^2 \leq \Delta$ et préciser les cas d'égalité.

c) [0.5 pt] Avec les notations du b), on pose $S = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})f(x_k)$ (somme de Riemann)

Montrer que $\left| \int_0^1 f(t) dt - S \right| \leq \frac{1}{2} \Delta M$.