

Interrogation n°1. Barème sur 24.5 pts. Les exos 9) et 10) portent sur les valeurs moyennes.

Nota Bene : Toute propriété vue en cours peut être utilisée sans justification.

1) [2 pts] Factoriser $X^6 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

2) On considère $P = 2X^3 + X - 4$.

a) [1 pt] Montrer brièvement que P admet une unique racine réelle α , et que $\alpha > 1$.

b) [1.5 pt] Soit $\beta \in \mathbb{C}$ une racine *non réelle* de P .

En utilisant la somme et le produit des racines sur $\mathbb{C}$, montrer que $\frac{1}{2} < |\beta| < \sqrt{2}$.

3) a) [1 pt] Soit un polynôme $P(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i$.

Exprimer *sans justification* les coefficients c_k de $P(X)^2 = \sum_{k=0}^{2n} c_k X^k$. On pourra exprimer c_k par une somme indexée sur l'ensemble des couples (i, j) vérifiant une certaine condition.

b) [1 pt] Soient $0 \leq p \leq n$. Déduire de a) la valeur de $\lambda = \sum_{i=0}^p \binom{n}{i} \binom{n}{p-i} = \sum_{0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq n, i+j=p} \binom{n}{i} \binom{n}{j}$.

4) [2 pts] Déterminer *tous* les polynômes réels P

de degré ≤ 4 dont le graphe est tangent

en les points d'abscisses 1 et 2 à la droite $L(x) = x$.

5) Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ des nombres complexes distincts. On pose $B(X) = (X - a_1) \dots (X - a_n)$.

a) [0.5 pt] Exprimer $B'(a_k)$ sous la forme d'un produit.

b) [1 pt] En déduire **avec le cours** que $\forall P \in K_{n-1}[X], P(X) = \sum_{k=1}^n \frac{P(a_k)}{B'(a_k)} \frac{B(X)}{(X - a_k)}$.

c) [1 pt] On suppose $n \geq 2$. Déduire de b) que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{B'(a_k)} = 0$.

6) a) [0.5 pt] Soit P un polynôme réel tel que $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, P(z) \neq 0$. Justifier que P est scindé sur $\mathbb{R}$.

b) [1.5 pt] Soit P un polynôme réel, **unitaire** et de degré n .

Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ ssi $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq |\operatorname{Im} z|^n$.

7) [1.5 pt] Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $n \geq 1$.

Montrer qu'il existe une partie **finie** $\Delta \subset \mathbb{C}$ telle que pour **tout** nombre complexe c n'appartenant pas à Δ , l'équation $P(z) = c$ d'inconnue z admet n solutions distinctes.

8) Soit $n = 2m + 1$ un entier **impair**.

a) [2 pts] Montrer qu'il existe un unique polynôme P_n de degré n tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin(nx) = P_n(\sin(x))$$

b) [1 pt] On pose $x_k = \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$. Montrer qu'il existe λ non nul tel que $P_n(x) = \lambda X \prod_{k=1}^m (X^2 - x_k^2)$.

c) [1 pt] (★) En déduire que pour tout réel x ,

$$\sin(nx) = n (\sin x) \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{(\sin x)^2}{\sin(k\pi/n)^2}\right)$$

9) *Caractérisation des applications affines par les valeurs moyennes*

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose dans tout l'exercice que f conserve la valeur moyenne, c'est-à-dire :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tous réels $x_1, \dots, x_n$ et pour tous réels positifs $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tels que $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, on a :

$$f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i)$$

a) [0.5 pt] Soient des réels $x < y$, et $z \in [x, y]$.

Expliciter $\lambda \in [0, 1]$ tel que z est valeur moyenne de x et y pondérés respectivement par $1 - \lambda$ et λ .

Remarque : λ est naturellement fonction de x, y, z .

b) [1 pt] Soient des réels $x < y$. Déduire de a) qu'il existe des réels a et b tels que $\forall z \in [x, y], f(z) = az + b$.

c) [0.5 pt] En déduire que f est affine sur $\mathbb{R}$. *Suggestion* : On pourra considérer f'' .

d) [1 pt] Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que pour toute variable aléatoire X à valeurs réelles, on a

$$E(g(X)) = g(E(X))$$

Déduire de ce qui précède que g est affine.

10) [3 pts] Soit $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de lois sur $[0, 1]$ convergeant vers un Dirac en 0, c'est-à-dire :

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\rho_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction positive vérifiant $\int_0^1 \rho_n(t) dt = 1$

(ii) pour tout $\alpha > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_\alpha^1 \rho_n(t) dt = 0$.

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Montrer (avec une preuve de type Cesàro) que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \rho_n(t) f(t) dt = f(0)$.

Remarque : Il est conseillé de poser $g(t) = f(t) - f(0)$.