

Interrogation n°0. Corrigé

1) *Première solution* : On a $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$. On a $\int_0^1 t^k dt = \frac{1}{k+1}$.

$$\text{D'où } S = \int_0^1 P(t) dt = \left[\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}.$$

Seconde solution : On a $\frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1}$.

$$\text{Donc } S = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} = \frac{1}{n+1} (2^{n+1} - 1).$$

2) On considère l'application f qui à $(x_1, \dots, x_p) \in E_{n,p}$ associe $A = \{x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + x_2 + \dots + x_{p-1}\}$.

f définit une bijection de $E_{n,p}$ sur l'ensemble des parties de cardinal $p-1$ de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Donc $a_{n,p} = \binom{n-1}{p-1}$.

3) a) On raisonne par contraposition. Supposons $n = \frac{p}{q}$ rationnel, avec $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ et $\text{pgcd}(p, q) = 1$.

Alors $q^2 n = p^2$. L'entier q divise p^2 et est premier avec p^2 , donc $q = 1$, et $n = p^2$ carré entier.

b) Supposons par l'absurde x rationnel. Donc x^2 est aussi rationnel.

Or $5 + 2\sqrt{6} = x^2$. Donc $\sqrt{6} = \frac{x^2 - 5}{2} \in \mathbb{Q}$, ce qui est absurde par a).

4) a) $E(Z) = \sum_{k=0}^n P(Z > k) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=k+1}^n P(Z = j) = \sum_{1 \leq k < j \leq n} P(Z = j) = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^{j-1} P(Z = j)$.

Comme $\sum_{k=0}^{j-1} P(Z = j) = P(Z = j) \sum_{k=0}^{j-1} 1 = jP(Z = j)$, on obtient bien $E(Z) = \sum_{j=0}^n P(Z = j)$.

b) Il y a $\binom{n}{p}$ configurations $\{X_1, \dots, X_p\}$ possibles.

On a $(Z > k)$ **si et seulement si** pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $X_i \in \llbracket k+1, n \rrbracket$.

Donc il y a $\binom{n-k}{p}$ configurations où $Z > k$. Donc $P(Z > k) = \frac{\binom{n-k}{p}}{\binom{n}{p}}$.

Donc par a), $E(Z) = \sum_{k=0}^{n-1} P(Z > k) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\binom{n-k}{p}}{\binom{n}{p}} = \sum_{j=p}^n \frac{\binom{j}{p}}{\binom{n}{p}}$, car $\binom{j}{p} = 0$ si $j < p$.

Par la formule de la "crosse de hockey", on a $\sum_{j=p}^n \binom{j}{p} = \binom{n+1}{p+1}$, donc $E(Z) = \frac{\binom{n+1}{p+1}}{\binom{n}{p}} = \frac{n+1}{p+1}$.

Remarque : Si les tirages étaient **avec remise**, on aurait $P(Z > k) = \frac{(n-k)^p}{n^p}$.

5) a) On ne perd rien en généralité en supposant $a \leq \theta_0 \leq \dots \leq \theta_n < b$.

Si on avait $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \theta_k - \theta_{k-1} \geq \frac{b-a}{n}$, alors $\theta_n - \theta_0 = \sum_{k=1}^n (\theta_k - \theta_{k-1}) \geq b-a$, qui est absurde.

Autre méthode : Pour tout i , il existe k tel que $\theta_i \in J_k = \left[a + \frac{k-1}{n}(b-a), a + \frac{k}{n}(b-a) \right]$, où $1 \leq k \leq n$.

Par le principe des tiroirs, il existe $i \neq j$ tels que θ_i et θ_j appartiennent à un même intervalle J_k car il y a n intervalles J_k pour $n+1$ réels θ_i . Quitte à permuter i et j , on a bien $0 \leq \theta_i - \theta_j < \frac{b-a}{n}$.

b) On a $\theta = \arg \left(\frac{1+i \tan u}{1+i \tan v} \right) = \arg(1+i \tan u) - \arg(1+i \tan v) = u - v$ (défini modulo 2π).

Or, $\left(\frac{1+i \tan u}{1+i \tan v} \right) = \frac{(1+i \tan u)(1-i \tan v)}{1+(\tan v)^2}$. D'autre part, par l'énoncé, on a $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

D'où $\tan \theta = \frac{\text{Im}((1+i \tan u)(1-i \tan v))}{\text{Re}((1+i \tan u)(1-i \tan v))} = \frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v}$.

c) On a $\lambda = \tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan(\pi/3) - \tan(\pi/4)}{1 + \tan(\pi/3)\tan(\pi/4)} = \frac{(\sqrt{3}-1)}{1+\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2} = 2 - \sqrt{3}$.

Autre méthode : On pourrait aussi utiliser $\tan(2\theta) = \frac{2\tan\theta}{1 - (\tan\theta)^2}$ avec $\theta = \frac{\pi}{12}$.

On obtient alors une équation du second degré dont λ est la solution positive.

d) On pose $\theta_i = \arctan(x_i) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Par a), il existe $i \neq j$ tels que $0 \leq \theta_j - \theta_i < \frac{\pi}{12}$.

On a $\frac{x_i - x_j}{1 + x_i x_j} = \frac{\tan(\theta_i) - \tan(\theta_j)}{1 + \tan(\theta_i)\tan(\theta_j)} = \tan(\theta_i - \theta_j)$ valide par b) car $\theta_i - \theta_j \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$.

Et par c), $0 \leq \tan(\theta_i - \theta_j) < \tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$, car $\tan$ est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

6) a) On a $\text{card}(A \cap B) = (\text{card } A) + (\text{card } B) - \text{card}(A \cup B)$, et on conclut avec $\text{card}(A \cup B) \leq n$.

b) On montre **d'abord** par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$ que $\text{card}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_p) \geq \sum_{i=1}^p \text{card}(A_i) - n(p-1)$.

En effet, la propriété est immédiate pour $p = 1$. Supposons la propriété est vraie au rang p .

On pose $B = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_p$. Ainsi, $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_p \cap A_{p+1} = B \cap A_{p+1}$.

D'une part, on applique a) à B et A_{p+1} et d'autre part on applique l'hyp de rec à $B = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_p$.

On en déduit que $\text{card}(B \cap A_{p+1}) \geq (\sum_{i=1}^p \text{card}(A_i) - n(p-1)) + \text{card}(A_{p+1}) - n = \sum_{i=1}^{p+1} \text{card}(A_i) - np$.

On peut **alors** conclure : Si $\sum_{i=1}^p \text{card}(A_i) > n(p-1)$, alors $\text{card}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_p) \geq 1$, d'où le résultat.

Autre preuve (sans récurrence) : L'idée est d'utiliser les complémentaires (intersection $\rightarrow$ réunion).

On note $\overline{A_i} = E \setminus A_i$ le complémentaire de A_i dans E .

Par hypothèse, on a $\sum_{i=1}^p \text{card}(A_i) > n(p-1)$, donc $\sum_{i=1}^p \text{card}(\overline{A_i}) < np - n(p-1) = n$.

Donc $\text{card}(\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \dots \cup \overline{A_p}) \leq \sum_{i=1}^p \text{card}(\overline{A_i}) < n$.

Or, on a $(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_p) = E \setminus (\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \dots \cup \overline{A_p})$. Donc $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_p$ n'est pas vide.

7) Une involution est une bijection vérifiant $f = f^{-1}$.

Pour construire une involution de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on choisit la valeur de $f(n)$. Il y a deux cas :

- si $f(n) = n$, alors il reste pour définir f à choisir une involution de $E \setminus \{n\}$

- si $f(n) = m \neq n$, alors $f(m) = n$, et il reste pour définir f à choisir une involution de $E \setminus \{n, m\}$.

Il y a dans ce dernier cas $(n-1)$ choix pour m .

Donc $I_n = I_n + (n-1)I_{n-2}$.

8) a) : (i) $\Rightarrow$ (ii) : Comme 1 vérifie (i), alors nécessairement un des x_k vaut 1.

Donc x_0 vaut 1 puisque la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Montrons les inégalités (ii) par contraposition :

Supposons par l'absurde qu'il existe k tel que $x_{k+1} > 1 + \sum_{j=0}^k x_j$.

Alors $n = 1 + \sum_{j=0}^k x_j$ n'a pas de décomposition :

En effet, supposons par l'absurde qu'il existe p et (ε_k) tels que $n = \sum_{k=0}^p \varepsilon_k x_k$.

Comme $x_{k+1} > 1 + \sum_{j=0}^k x_j$, on a nécessairement $p \leq k$, d'où une contradiction, car $\sum_{k=0}^p \varepsilon_k x_k \leq \sum_{k=0}^p x_k < n$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : Posons $S_p = \sum_{j=0}^p x_j$.

La suite $(S_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite d'entiers strictement croissante, donc $\lim_{p \rightarrow +\infty} S_p = +\infty$.

Montrons par récurrence sur p que tout entier n vérifiant $n \leq S_p$ s'écrit $n = \sum_{k=0}^p \varepsilon_k x_k$, où les $\varepsilon_k \in \{0, 1\}$.

La propriété est immédiate pour $p = 0$, car $x_0 = 1$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, et supposons la propriété vraie au rang $(p - 1)$. Supposons $n \leq S_p$.

- Si $n > x_p$, alors $m = n - x_p \in \mathbb{N}$ vérifie $m \leq S_{p-1}$.

Par hypothèse de récurrence, $m = \sum_{j=0}^{p-1} \varepsilon_j x_j$, donc $n = \sum_{j=0}^p \varepsilon_j x_j$, avec $\varepsilon_p = 1$.

- Si $n < x_p$, alors a fortiori, $n \leq S_{p-1}$, donc la propriété résulte de l'hypothèse de récurrence.

Remarque : Une variante consiste à montrer par récurrence forte sur p que tout entier n vérifiant $S_{p-1} < n \leq S_p$ s'écrit sous la forme $n = \sum_{j=0}^p \varepsilon_j x_j$, où les $\varepsilon_k \in \{0, 1\}$.

b) On va montrer qu'il y a existence et unicité ssi $\forall k \in \mathbb{N}, x_k = 2^k$ (cf écriture en base 2 d'un entier). Une CNS pour l'existence est donnée en a), et on la suppose désormais vérifiée.

On a ainsi $x_0 = 1$ et $x_{k+1} \leq 1 + \sum_{j=0}^k x_j = 1 + \sum_{j=0}^{k-1} x_j + x_k$, donc $x_{k+1} \leq x_k + x_k$, d'où on obtient $x_k \leq 2^k$.

Ainsi, $S_p \leq \sum_{j=0}^k 2^j = 2^{p+1} - 1$.

Supposons qu'il y a pour tout entier n unicité de la décomposition.

Il y a 2^p familles $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{p-1}) \in \{0, 1\}^p$. Donc il existe 2^p entiers de la forme $n = \sum_{j=0}^{p-1} \varepsilon_j x_j$, où les $\varepsilon_k \in \{0, 1\}$.

Comme ces entiers sont tous $\leq S_{p-1} \leq 2^p - 1$, ces 2^p entiers sont donc exactement les entiers de 0 à S_{p-1} .

Donc $x_p = 1 + S_{p-1}$: en effet, sinon, on aurait $x_p \leq S_{p-1}$ et $x_p = 1.x_p$ admettrait une autre décomposition.

On en déduit donc que $\forall k \in \mathbb{N}, x_k = 2^k$.

Réciproquement, supposons $\forall k \in \mathbb{N}, x_k = 2^k$. On sait alors qu'il y a unicité : En effet, cette situation correspond à la décomposition d'un entier en base 2, c'est-à-dire $n = \varepsilon_0 + 2\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2 + \dots$.

On en conclut qu'il y a unicité ssi $\forall k \in \mathbb{N}, x_k = 2^k$ (ce qui correspond au cas d'égalité dans les inégalités de (ii)).