

Interrogation n°0. Barème sur 23 pts. Le sujet comporte deux pages

1) [1.5 pt] Calculer $S = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$.

2) [1.5 pt] Soient n et $p \in \mathbb{N}^*$.

On note $A_{n,p}$ l'ensemble des p -uplets $(x_1, \dots, x_p) \in (\mathbb{N}^*)^p$ d'entiers **non nuls** tels que $n = x_1 + \dots + x_p$.

On pose $a_{n,p} = \text{card } A_{n,p}$. Justifier que $a_{n,p} = \binom{n-1}{p-1}$: on se contentera d'expliquer (sans la justifier) une bijection f entre $A_{n,p}$ et un ensemble de cardinal $\binom{n-1}{p-1}$.

3) a) [1.5 pt] Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n n'est pas un carré entier, $\sqrt{n}$ est un nombre irrationnel.

b) [1.5 pt] Montrer que $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ est un nombre irrationnel.

4) Soient n et $p \in \mathbb{N}^*$.

On tire p boules dans une urne contenant k boules numérotées de 1 à n .

Pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on note X_i la valeur de la boule choisie lors du i -ième tirage.

On pose $Z = \min(X_1, \dots, X_p) \in \llbracket 1, n \rrbracket$ la valeur minimale obtenue.

a) [1.5 pt] Par définition, on a $E(Z) = \sum_{j=1}^n j P(Z = j)$.

En utilisant $P(Z > k) = \sum_{j=k+1}^n P(Z = j)$, démontrer la formule bien connue $E(Z) = \sum_{k=0}^n P(Z > k)$.

b) [1.5 pt] On suppose que les tirages se font **sans remise** : les X_i sont deux à deux distincts.

Ainsi, une configuration est définie par la partie $\{X_1, \dots, X_p\}$ des p boules tirées parmi les n boules.

Justifier que $P(Z > k) = \frac{\binom{n-k}{p}}{\binom{n}{p}}$. En déduire (avec une formule du cours) que $E(Z) = \frac{n+1}{p+1}$.

5) a) [1.5 pt] Soient $(n+1)$ réels $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n$ dans un intervalle réel ouvert $]a, b[$.

Montrer qu'il existe $i \neq j$ tels que $0 \leq \theta_i - \theta_j < \frac{b-a}{n}$.

Remarque : Sans perte de généralité, on peut supposer que $\theta_0 \leq \dots \leq \theta_n$.

b) [1.5 pt] Soient u et $v \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ tels que $u - v \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$. On note $\arg z$ l'argument de $z \in \mathbb{C}^*$.

Préciser sans justification la valeur de $\theta = \arg \left(\frac{1 + i \tan u}{1 + i \tan v} \right)$. En déduire $\tan(u - v) = \frac{\tan(u) - \tan(v)}{1 + \tan(u) \tan(v)}$.

c) [1.5 pt] On pose $\lambda = \tan \left(\frac{\pi}{12} \right)$. En utilisant b), montrer que $\lambda = 2 - \sqrt{3}$.

d) [1.5 pt] On se donne 13 réels $x_0, x_1, \dots, x_{12}$. Montrer qu'il existe $i \neq j$ tels que

$$0 \leq \frac{x_i - x_j}{1 + x_i x_j} < 2 - \sqrt{3}$$

6) Soit E un ensemble fini de cardinal n .

a) [0.5 pt] Soient A et B deux parties de E . Montrer que $\text{card}(A \cap B) \geq (\text{card } A) + (\text{card } B) - n$.

b) [2.5 pts] Soient $A_1, \dots, A_p$ des parties de E telles que $\text{card } A_1 + \text{card } A_2 + \dots + \text{card } A_p > n(p-1)$.

Montrer que $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_p$ n'est pas vide.

7) [1.5 pt] Une involution f de E est une application $f : E \rightarrow E$ vérifiant $\forall x \in E, f(f(x)) = x$.

On note I_n le nombre d'applications involutives d'un ensemble E de cardinal n .

On a $I_0 = I_1 = 1$. Justifier (brièvement) que pour tout entier $n \geq 2$, on a $I_n = I_{n-1} + (n-1)I_{n-2}$.

8) Soit $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite **croissante** d'entiers naturels **non nuls**. Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose $S_p = \sum_{k=0}^p x_k$.

a) [3.5 pts] (★) Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Tout entier $n \in \mathbb{N}$ s'écrit sous la forme $\sum_{k=0}^p \varepsilon_k x_k$, où $p \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon_k \in \{0, 1\}$ pour tout $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$

(ii) $x_0 = 1$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_{k+1} \leq 1 + \sum_{j=0}^k x_j$

b) [*Question hors-interrogation*] Donner une condition nécessaire et suffisante sur la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ pour que tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ admette *une unique* décomposition $n = \sum_{k \geq 0} \varepsilon_k x_k$, où les $\varepsilon_k \in \{0, 1\}$.