Interrogation n°24 (première version). *Barème sur 26.5 pts*

Exercice A

On note $O_{+\infty}(1)$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ bornées au voisinage de $+\infty$.

On note $\mathcal{E}$ le sev des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^∞ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad t^p\ f^{(n)}(t) = O_{\pm\infty}(1) \text{ lorsque } t \text{ tend vers } \pm\infty$$

1) [1 pt] Soient $f \in \mathcal{E}$ et $p \in \mathbb{N}$. On pose $F_p(t) = t^p\ f(t)$. Montrer que $F_p \in \mathcal{E}$.

2) [1.5 pt] Montrer que $g(t) = \exp(-t^2)$ appartient à $\mathcal{E}$.

3) Soit $f \in \mathcal{E}$. On pose pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\boxed{\widehat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\ \exp(i\lambda t)\ dt}$.

a) [2 pts] Montrer que $\widehat{f}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et que $\widehat{f}^{(n)}(\lambda) = i^n\ \widehat{F_n}(\lambda)$.

b) [1 pt] Montrer que $\lambda\ \widehat{f}(\lambda) = i\ \widehat{(f')}(\lambda)$.

c) [0.5 pt] Montrer que $\widehat{f}(\lambda) = O_{\pm\infty}(1)$ lorsque λ tend vers $\pm\infty$

d) [2 pts] En utilisant les questions précédentes, montrer que $\widehat{f}$ appartient à $\mathcal{E}$.

Exercice B

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On pose $\mu = \inf \left\{ \alpha \in \mathbb{R} \mid \left(\dfrac{a_n}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est bornée} \right\}$ et on suppose $\mu \in \mathbb{R}$.

1) a) [1 pt] Montrer que pour tout réel $\alpha > \mu$, la suite $\left(\dfrac{a_n}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

b) [1.5 pt] Montrer que pour tout réel $\alpha > \mu + 1$, la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{a_n}{n^\alpha}$ converge absolument.

2) [2.5 pts] Montrer que $g : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \exp(-(\ln n)x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n^x}$ est de classe C^1 sur $]\mu+1, +\infty[$.

3) [2 pts] On note $\Delta = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > \mu + 1\}$.

Montrer que $f : \Delta \to \mathbb{C} \quad z \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \exp(-(\ln n)z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n^z}$ est bien définie et continue.

Indication : Utiliser la caractérisation séquentielle.

Exercice D

Soit E un espace euclidien. On note $\Sigma = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$ la sphère unité.

On note $\|u\|_{op} = \sup_{x\in\Sigma}\ \|u(x)\|$ la norme d'endomorphisme subordonnée à la norme euclidienne.

Soit $u \in S(E)$ autoadjoint admettant d valeurs propres distinctes $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_d$.

Pour $\lambda \in \operatorname{Sp}(u)$, on note $E_\lambda = \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id})$ le sev propre associé.

1) a) [1 pt] Soit un vecteur $x \in \Sigma$ de norme 1. Montrer qu'il existe des vecteurs $x_1, ..., x_d \in E$ tels que

$$x = \sum_{k=1}^{d} x_k \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![1, d]\!],\ u(x_k) = \lambda_k x_k \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{d} \|x_k\|^2 = 1$$

b) [2 pts] Soit $u \in S(E)$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\forall x \in \Sigma,\ |\langle x, u(x)\rangle| \leq \varepsilon$.

Montrer que $\|u\|_{op} \leq \varepsilon$ et que $\forall (x, y) \in \Sigma^2,\ |\langle x, u(y)\rangle| \leq \varepsilon$.

2) a) [1.5 pt] Soit P un polynôme réel tel que $\forall t \in [\lambda_1, \lambda_d],\ P(t) \in [a, b]$. Montrer que

$$\forall x \in \Sigma, \qquad \langle x, P(u)(x)\rangle \in [a, b]$$

b) [1 pt] Soit $k \in [\![1, d]\!]$. On considère $L_k(X) = \prod_{1 \leq j \leq d,\ j \neq k} \dfrac{X - \lambda_j}{\lambda_k - \lambda_j}$.

Caractériser l'endomorphisme $L_k(u)$. Justifier que $\forall x \in \Sigma,\ \langle x, L_k(u)(x)\rangle \in [0, 1]$.

3) On pose $\forall k \in \mathbb{N},\ H_k = \{P(u),\ P \in \mathbb{R}_{k-1}[X]\} = \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}, u, u^2, ..., u_{k-1})$, avec $H_0 = \{0\}$.

a) [1.5 pt] On considère $x = e_1 + ... + e_d$ somme de d vecteurs propres (non nuls), où $e_k \in E_{\lambda_k}$.

Montrer que la famille $(x, u(x), ..., u^{d-1}(x))$ est libre.

b) [2 pts] Montrer que $\forall k \leq d,\ \dim H_k = k$ et que $\forall k \geq d,\ H_k = H_d$.

c) [1.5 pt] On suppose $u \in S^{++}(E)$. Montrer que $u^{-1} \in H_d$.

Exercice Z

[1 pt] On note T_n le polynôme de Tchebychev : $\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

Montrer que $X^n = \dfrac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\ T_{|n-2k|}(X)$.

Interrogation n°24 (seconde version). *Barème sur 24 pts*

Exercice C

1) Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On pose $P_n = \prod_{k=0}^{n} (1 + z_k)$.

On suppose que $\sum |z_n|$ converge et on pose $L = \sum_{n=0}^{+\infty} |z_n|$.

a) [2 pts] Montrer que $|P_{n+1} - P_n| \leq |z_{n+1}| \ e^L$.

b) [1 pt] Montrer que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

2) [2 pts] Soit $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $\omega_n : J \to \mathbb{C}$ à valeurs complexes.

On suppose que $\sum \omega_n$ converge normalement sur J. On pose $P_n(x) = \prod_{k=0}^{n} (1 + \omega_k(x))$.

Montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur J.

3) Soient Y et Z deux variables aléatoires entières, c'est-à-dire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On note D le disque unité de $\mathbb{C}$, c'est-à-dire $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$.

a) [1 pt] Montrer que pour tout $A \subset \mathbb{N}$, on a $|P(Y \in A) - P(Z \in A)| \leq P(Y \neq Z)$.

Indication : Considérer $|1_{Y\in A} - 1_{Z\in A}|$.

b) [1 pt] En considérant $A = \{n \in \mathbb{N} \mid P(Y = n) \geq P(Z = n)\}$, montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |P(Y = n) - P(Z = n)| \leq 2 \ P(Y \neq Z)$$

c) [0.5 pt] Montrer que pour tout $z \in D$, $|G_Y(z) - G_Z(z)| \leq 2 \ P(Y \neq Z)$.

4) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables indépendantes de Bernoulli.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = P(X_n = 1)$. On suppose que la série $\sum p_n$ converge, c'est-à-dire $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n < +\infty$.

On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et on définit $\forall \omega \in \Omega$, $S(\omega) = \lim_{n\to+\infty} S_n(\omega) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

a) [1 pt] Pour $z \in D$, expliciter $G_{S_n}(z)$ et montrer que $(G_{S_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur D.

b) [1.5 pt] Montrer que $S(\omega) < +\infty$ presque sûrement, et que S est une variable aléatoire.

c) [0.5 pt] On peut donc considérer S comme une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Montrer que $(G_{S_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers G_S sur D.

Exercice D

Soit E un espace euclidien. On note $\Sigma = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$ la sphère unité.

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on note $\|u\|_{op} = \sup_{x\in\Sigma} \ \|u(x)\|$ la norme d'endomorphisme subordonnée à la norme euclidienne.

Soit $u \in S(E)$ autoadjoint admettant d valeurs propres distinctes $\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_d$.

Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, on note $E_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda \, \mathrm{Id})$ le sev propre associé.

1) a) [1 pt] Soit un vecteur $x \in \Sigma$ de norme 1. Montrer qu'il existe des vecteurs $x_1, ..., x_d \in E$ tels que

$$x = \sum_{k=1}^{d} x_k \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1, d]\!],\, u(x_k) = \lambda_k x_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{d} \|x_k\|^2 = 1$$

b) [2 pts] Soit $u \in S(E)$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\forall x \in \Sigma,\ |\langle x, u(x)\rangle| \leq \varepsilon$.

Montrer que $\|u\|_{op} \leq \varepsilon$ et que $\forall (x, y) \in \Sigma^2,\ |\langle x, u(y)\rangle| \leq \varepsilon$.

2) a) [1.5 pt] Soit P un polynôme réel tel que $\forall t \in [\lambda_1, \lambda_d],\ P(t) \in [a, b]$. Montrer que

$$\forall x \in \Sigma, \qquad \langle x, P(u)(x)\rangle \in [a, b]$$

b) [1 pt] Soit $k \in [\![1, d]\!]$. On considère $L_k(X) = \prod_{1 \leq j \leq d,\ j \neq k} \dfrac{X - \lambda_j}{\lambda_k - \lambda_j}$.

Caractériser l'endomorphisme $L_k(u)$. Justifier que $\forall x \in \Sigma,\ \langle x, L_k(u)(x)\rangle \in [0, 1]$.

3) On pose $\forall k \in \mathbb{N},\ H_k = \{P(u),\ P \in \mathbb{R}_{k-1}[X]\} = \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}, u, u^2, ..., u_{k-1})$, avec $H_0 = \{0\}$.

a) [1.5 pt] On considère $x = e_1 + ... + e_d$ somme de d vecteurs propres (non nuls), où $e_k \in E_{\lambda_k}$.

Montrer que la famille $(x, u(x), ..., u^{d-1}(x))$ est libre.

b) [2 pts] Montrer que $\forall k \leq d,\ \dim H_k = k$ et que $\forall k \geq d,\ H_k = H_d$.

c) [1.5 pt] On suppose $u \in S^{++}(E)$. Montrer que $u^{-1} \in H_d$.

4) [1.5 pt] On suppose $u \in S^{++}(E)$. On pose $\tau = \dfrac{\lambda_d}{\lambda_1} > 0$ et $\alpha = \dfrac{\sqrt{\tau} - 1}{\sqrt{\tau} + 1} < 1$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note Δ_k l'ensemble des polynômes Q de degré $\leq k$ tel que $Q(0) = 1$.

On admet ici qu'il existe un polynôme $Q_k \in \Delta_k$ tel que $\forall t \in [\![\lambda_1, \lambda_d]\!],\ |Q_k(t)| \leq 2\alpha^k$.

Montrer qu'il existe $v \in H_k$ tel que $\|\mathrm{Id} - u \circ v\|_{op} \leq 2\alpha^k$.

5) On se propose de prouver la propriété admise au 4).

On considère $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et $T_{k+1} = 2XT_k - T_{k-1}$. On a $\deg T_k = k$.

Par la trigonométrie, on a $\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_k(\cos\theta) = \cos(k\theta)$ et $T_k(\mathrm{ch}\,\theta) = \mathrm{ch}(k\theta)$.

a) [0.5 pt] Montrer que $\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_k(-\mathrm{ch}\,\theta) = (-1)^k \mathrm{ch}(k\theta)$.

b) [1 pt] Soient $0 < \mu < \lambda$. On considère le polynôme

$$Q_k(X) = \omega_k\ T_k\left(\frac{2X - (\lambda + \mu)}{\lambda - \mu}\right), \quad \text{où} \quad \omega_k = \frac{1}{T_k\left(-\dfrac{\lambda + \mu}{\lambda - \mu}\right)}$$

Montrer que $Q_k(0) = 1$ et que $\sup_{t \in [\mu, \lambda]} |Q_k(t)| = |\omega_k|$.

c) [0.5 pt] On considère $\theta = \mathrm{argch}\left(\dfrac{\lambda + \mu}{\lambda - \mu}\right) > 0$. Montrer que $|\omega_k| \leq 2e^{-n\theta}$.

d) [1.5 pt] On pose $\tau = \dfrac{\lambda}{\mu} > 1$. Montrer que e^θ est racine de $X^2 - 2\dfrac{\lambda + \mu}{\lambda - \mu}X + 1$. En déduire $e^{-\theta} = \dfrac{\sqrt{\tau} - 1}{\sqrt{\tau} + 1}$.

6) [1 pt] Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ X^n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{2^n} \binom{n}{k}\ T_{|n-2k|}$.