

Interrogation n°23 bis. Corrigé

Problème

1) a) Par comparaison, les fonctions considérées sont intégrables en $+\infty$ et en $-\infty$, car $O_{+\infty}(1/x^2)$.

- Avec le changement de variable affine $y = -x$, $\int_{-\infty}^0 xG(x) dx = -\int_0^{+\infty} xG(x) dx$, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} xG(x) dx = 0$.

Remarque : On utilise en fait l'imparité de $x \mapsto xG(x)$.

- Une primitive de $x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ est $\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$. Donc par IPP, on a : $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 G(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x) dx = 1$.

Remarque : $\int_0^{+\infty} x^p \exp(-x^2/2) dx$ peut s'exprimer à l'aide de la fonction Γ avec le changement de variable bijectif $x = \sqrt{2y}$: on obtient $\sqrt{2}^{p+1} \int_0^{+\infty} y^{(p-1)/2} \exp(-y) dy = \sqrt{2}^{p+1} \Gamma((p+1)/2)$.

b) On a $G_\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} G\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)$, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} G_\lambda(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} G(y) dy = 1$ avec $y = \frac{x}{\sqrt{\lambda}}$.

De même, $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 G_\lambda(x) dx = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 G(y) dy = \lambda$. *Remarque* : Ainsi, la variance de la loi gaussienne G_λ vaut λ .

2) *Remarque* : La fonction f est bornée au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$, car converge. Et f est bornée sur tout segment. Donc f est bornée sur $\mathbb{R}$. Posons $M = \sup_{\mathbb{R}} |f|$.

a) - On fixe $x \in \mathbb{R}$. On pose $F(t) = f(x-t)p(t)$.

On a F continue et $F(t) = O_{+\infty}(p(t))$ et $F(t) = O_{-\infty}(p(t))$. Comme p est intégrable, F est intégrable.

- Montrons que $(f * p)$ est continue.

Première preuve (par les th sur les intégrales paramétrées) : Posons $F(x, t) = f(x-t)p(t)$.

On a $\forall t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto F(x, t)$ est continue et $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x, t) \leq \|f\|_\infty p(t) = \varphi(t)$, et φ intégrable sur $\mathbb{R}$.

Seconde preuve : ici, on peut aussi déduire la continuité de l'uniforme continuité.

Soit $\varepsilon > 0$. Par uniforme continuité, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $|x - y| < \alpha$. On a donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $|f(x-t) - f(y-t)| < \varepsilon$.

D'où $|(f * p)(x) - (f * p)(y)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon p(t) dt = \varepsilon$. A fortiori, $(f * p)$ est donc continue en tout point.

b) Posons $F_x(t) = f(x-t)p(t)$. On a $\forall t \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_x(t) = 0$ car $\lim_{+\infty} f = 0$.

D'autre part, $|F_x(t)| \leq \|f\|_\infty p(t) = \varphi(t)$, et φ intégrable sur $\mathbb{R}$.

Donc par convergence dominée (pour un paramètre continu), $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f * p)(x) = f(x)$.

3) a) *Remarque* : T_p est bien définie par 2) : si $f \in E$, alors $(f * p) \in E$. Et T_p est bien linéaire.

On a $|(f * p)(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \|f\|_\infty p(t) dt = \|f\|_\infty$. Donc $\|T_p(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.

b) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. La propriété est immédiate pour $n = 0$ car $T_p^0(f) = f$.

Supposons la propriété vraie au rang $n \geq 0$.

On a $T_p^{n+1}(f) - T_q^{n+1}(f) = T_p^n(T_p(f)) - T_p^n(T_q(f)) + T_p^n(T_q(f)) - T_q^n(T_q(f))$.

Or, $T_p^n(T_p(f)) - T_p^n(T_q(f)) = T_p^n(T_p(f) - T_q(f))$.

Par a) $\|T_p^n(T_p(f) - T_q(f))\|_\infty \leq \|T_p(f) - T_q(f)\|_\infty$ en composant n fois l'inégalité du a)

Donc $\|T_p^n(T_q(f)) - T_q^n(T_p(f))\|_\infty = \|T_q(T_p^n(f) - T_q^n(f))\| \leq \|T_p^n(f) - T_q^n(f)\|_\infty$ par a).

Donc $\|T_p^n(T_q(f)) - T_q^n(T_p(f))\|_\infty \leq n \|T_p(f) - T_q(f)\|$ par a) et hyp de récurrence.

On déduit de l'inégalité triangulaire que $\|T_p^{n+1}(f) - T_q^{n+1}(f)\|_\infty \leq (n+1) \|T_p(f) - T_q(f)\|$.

Autre preuve : Comme $T_p \circ T_q = T_q \circ T_p$, on a $(T_p)^n - (T_q)^n = \left(\sum_{k=0}^{n-1} (T_p)^k (T_q)^{n-1-k} \right) \circ (T_p - T_q)$.

Par a), les $(T_p)^k (T_q)^{n-1-k}$ sont 1-lipschitziennes, donc $\|(T_p^{n+1} - T_q^{n+1})(f)\|_\infty \leq \|(T_p - T_q)(f)\|_\infty$.

Remarque culturelle : $T_p \circ T_q = T_q \circ T_p$ résulte en fait de Fubini (pour les intégrales intégrables) :

$$(T_p \circ T_q)(f) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-t-s) p(s) q(t) \right) ds dt = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-t-s) q(s) p(t) \right) dt ds = (T_q \circ T_p)(f).$$

4) a) On a $(f * p_a)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) p_a(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u/a) p(u) du$, avec $t = u/a$.

Posons $H_a(u) = f(x-u/a) p(u)$. On a $\forall u \in \mathbb{R}$, $\lim_{a \rightarrow +\infty} H_a(u) = f(x) p(u)$ et $|H_a(u)| \leq \|f\|_\infty p(u) = \varphi(u)$.

Comme φ est intégrable sur $\mathbb{R}$, on a par cv dominée, $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} H_a(u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) p(u) du = f(x)$.

b) $\int_{|t| < r} p_a(t) dt = 2 \int_r^{+\infty} ap(at) dt = 2 \int_{ar}^{+\infty} p(t) dt \rightarrow 0$ lorsque a tend vers $+\infty$, car on a alors $ar \rightarrow +\infty$.

c) On a $\forall x$, $(f * p_a)(x) - f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t) - f(x)| p_a(t) dt$. Posons $M = \|f\|_\infty$.

On fixe $\varepsilon > 0$. Il existe $r > 0$ tel que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|x - y| < r \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

On a $\forall x$, $|(f * p_a)(x) - f(x)| \leq \varepsilon \int_{|t| < r} p_a(t) dt + 2M \int_{|t| \geq r} p_a(t) dt \leq \varepsilon + 2M \int_{|t| \geq r} p_a(t) dt$.

Par b), $M \int_{|t| \geq r} p_a(t) dt \leq \varepsilon$ pour a assez grand. Donc $\sup_{x \in \mathbb{R}} |(f * p_a)(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon$ pour a assez grand.

Donc $\lim_{a \rightarrow +\infty} \sup_{\mathbb{R}} |(f * p_a) - f| = 0$, c'est-à-dire $(f * p_a)$ cv uniformément vers f lorsque $a \rightarrow +\infty$. **Exercice A. Loi**

faible et loi forte des grands nombres

1) Résulte de $E(X^2)^2 \leq E(X^4)$: la variable X^2 est de moment d'ordre 2 fini, donc d'espérance finie.

2) On a $E(Y_n) = 0$, donc $E(Y_n^2) = V(Y_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n V(X_k) = \frac{Kn}{n^2} = \frac{K}{n}$.

Par l'inégalité de Tchebychev : $P(|Y_n| \leq \varepsilon) \leq \frac{V(Y_n)}{\varepsilon^2} = \frac{K}{n\varepsilon^2}$.

3) a) Pour construire un tel quadruplet :

- On choisit la paire $\{\alpha, \beta\}$, avec $\alpha < \beta$, des deux valeurs prises par (i, j, k, l) . Il y a $\binom{n}{2}$ choix.

- Puis on choisit la position des deux éléments valant α : il y a $\binom{4}{2}$ choix

- Il reste un seul choix pour les autres éléments, qui valent β .

Donc $N = \binom{n}{2} \binom{4}{2} = \frac{1}{2} n(n-1) \times 6 = 3n(n-1)$.

Par exemple, lorsque $n = 2$, il y a $6 = \binom{4}{2}$ quadruplets $(1, 1, 2, 2)$, $(1, 2, 1, 2)$, etc ...

b) On a $Y_n^4 = \frac{1}{n^4} \sum_{i,j,k,l} X_i X_j X_k X_l$. Mais $E(X_i X_j X_k X_l) = 0$ sauf (éventuellement) des deux cas :

- les i, j, k, l sont tous égaux : il y a n choix.

- les i, j, k, l se répartissent en deux paires distinctes de terme égaux : il y a N choix.

Donc $E(Y_n^4) = \frac{nK}{n^4} + \frac{N}{n^4} L = \frac{K}{n^3} + \frac{3(n-1)}{2n^3} L$, donc $E(Y_n^4)$ est en $O(\frac{1}{n^3})$.

c) On a $P(|Y_n| \geq \varepsilon) = P(Y_n^4 \geq \varepsilon^4)$.

Y_n^4 est une variable positive, donc par l'inégalité de Markov, $P(Y_n^4 \geq \varepsilon^4) \leq \frac{E(Y_n^4)}{\varepsilon^4} = O(\frac{1}{n^3})$ par b).

d) On pose $B_\varepsilon : |Y_n| > \varepsilon$ pour n assez grand. On a $B_\varepsilon = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{N \in \mathbb{N}} (|Y_n| > \varepsilon)$.

Par c), on a $\sum_{n \geq m} P(|Y_n| \geq \varepsilon)$ converge, donc $\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n \geq m} P(|Y_n| \geq \varepsilon) = 0$.

Par continuité décroissante, on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{n \geq m} (|Y_n| \geq \varepsilon)\right) = 0$.

Par continuité croissante, on a donc $P(\overline{B_\varepsilon}) = 0$, donc $\lim_{m \rightarrow +\infty} P(B_\varepsilon) = 1$.

e) On a $\forall k \in \mathbb{N}^*, |Y_n(\omega)| \leq \frac{1}{k}$ presque sûrement.

Par continuité croissante, on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} Y_n(\omega) = 0$ presque sûrement.

Remarque : En effet, $(\lim_{n \rightarrow +\infty} Y_n(\omega) = 0) = \bigcap_{k \geq 1} \left(|Y_n(\omega)| \leq \frac{1}{k}\right)$.

Exercice B

1) a) - K est bornée car inclus dans $[a, b]^2$.

- K est fermée : soit $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de K convergeant vers $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in [a, b], y_n \in [a, b]$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.

Alors x et $y \in [a, b]$, et $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$ par continuité de f et par passage à la limite des inégalités larges.

b) L'application ϕ est continue par caractérisation séquentielle.

D'autre part, pour $(x, y) \in K$, on a nécessairement $x \neq y$, donc $\phi(x, y) > 0$.

Ainsi, ϕ est minorée sur le compact K par un réel strictement positif α . (on prend α arbitraire si K est vide).

Donc $\forall (x, y) \in K, |x - y| \geq \alpha$. Par contraposition, $\forall (x, y) \in [a, b]^2, |x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

c) Soit $\varepsilon > 0$. Par b), il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall (x, y) \in [a, b]^2, |x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

On considère $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{b-a}{n} \leq \alpha$, et on pose $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, x_k = a + k \frac{b-a}{n}$.

On définit φ par $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \varphi(x_k) = f(x_k)$ et $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall x \in]x_{k-1}, x_k[, \varphi(x) = f(x_k)$.

On a bien $\forall x \in]x_{k-1}, x_k[, |f(x) - \varphi(x)| = |f(x) - f(x_k)| \leq \varepsilon$, car $x - x_k \leq \frac{b-a}{n} \leq \alpha$.

2) a) Comme $\lim_{+\infty} f = 0$, il existe b tel que $\forall x \geq b, |f(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon$.

Donc $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x \geq b \text{ et } y \geq b) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

b) De même, il existe a tel que $\forall (x, y), (x \leq a \text{ et } y \leq a) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Par 1) appliqué à $[a-1, b+1]$, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall (x, y) \in [a-1, b+1]^2, |x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Considérons alors $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $|x - y| < \min(1, \alpha)$.

On a en particulier $|x - y| < 1$. Alors $(x \text{ et } y \leq a)$ ou $(x \text{ et } y \geq b)$ ou $(x \text{ et } y \in [a-1, b+1])$.

Dans les trois cas, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Ce qui donne la propriété demandée.