Interrogation n°19. *Barème sur 25.5 pts*

Exercice A [4.5 pts]

Déterminer la nature convergente ou divergente des séries suivantes :

1) [4 pt] $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n\ln n}$.

2) [1 pt] $\sum_{n\geq 1} a_n$, où $a_n = (\ln n)\prod_{k=1}^{n}\left(\dfrac{k+1}{2k}\right)$.

3) [1.5 pt] $\sum_{n\geq 1}(-1)^n a_n$, où $a_n = (n+1)^\alpha - n^\alpha$ avec $0<\alpha<1$.

4) [1 pt] $\sum(a_{n+1}-a_n)b_n$, où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante positive et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée.

Exercice B [6 pts]

1) [1 pt] Justifier l'existence de $J(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{t^{x-1}}{e^t-1}\,dt$ pour tout $x>1$.

2) [3 pts] Montrer que J est de classe C^∞ sur $]1,+\infty[$.

3) [2 pts] Soit $x>1$. Montrer que $J(x) = \Gamma(x)\zeta(x)$, où $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$ et $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^x}$.

Exercice C [6.5 pts]

1) Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{n,p}$ des séries convergentes de réels paramétrées par un entier $p\in\mathbb{N}$.

On suppose que pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe $\lambda_n = \lim_{p\to+\infty} a_{n,p}$.

On souhaite trouver des hypothèses assurant que $\sum\lambda_n$ converge et $\lim_{p\to+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,p} = \sum_{n=0}^{+\infty}\lambda_n$.

a) [1 pt] Une série peut s'écrire comme l'intégrale d'une fonction en escalier : $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,p} = \int_0^{+\infty}\varphi_p(t)\,dt$.

Donner sans justification les hypothèses sur les $a_{n,p}$ permettant d'appliquer **le th de convergence dominée**.

b) [1 pt] On peut aussi appliquer le théorème de la double limite en considérant les suites comme des fonctions sur $\mathbb{N}$.

Donner sans justification les hypothèses permettant d'appliquer **le théorème de la double limite** via une **convergence normale**.

c) [0.5 pt] Comparer (*en une ligne sans détailler*) les hypothèses proposées en a) et en b).

2) On dit qu'une fonction $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ est DSE sur $\mathbb{C}$ ssi il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes telle que $\forall z\in\mathbb{C},\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

On rappelle (*admis ici*) qu'on a alors $\boxed{\forall r>0,\ \forall n\in\mathbb{N},\ \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{it})\,e^{-int}\,dt = a_n r^n}$.

Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions DSE sur $\mathbb{C}$. On pose $f_k(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^{(k)} z^n$.

On suppose que $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{C}$ vers une fonction f et que la convergence est uniforme sur tout compact (= fermé borné) de $\mathbb{C}$.

a) [0.5 pt] Soient $r>0$ et $n\in\mathbb{N}$. Donner une majoration de $|a_n|$ en fonction de $M_r(f) = \sup_{|z|=r}|f(z)|$.

b) [1.5 pt] Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe $a_n = \lim_{k\to+\infty} a_n^{(k)}$.

c) [2 pts] En utilisant 1), montrer que f est DSE sur $\mathbb{C}$ et que $\forall z\in\mathbb{C},\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

$\boxed{\textbf{Exercice D}}$ [8 pts] (*extrait X MP*)

Soit V et W deux matrices appartenant à $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

1) [1.5 pt] Montrer que $(\operatorname{Im} V)^{\perp} = \operatorname{Ker}(V^T)$. On a donc de même $(\operatorname{Im} W)^{\perp} = \operatorname{Ker}(W^T)$.

2) [1.5 pt] On suppose **dans cette seule question** que $V^T V = I_q$.

Montrer que $q \leq p$ et que $P = VV^T$ est la matrice de la projection orthogonale dans $\mathbb{R}^p$ sur $\operatorname{Im} V$.

Pour la suite, on considère $M = \left(\begin{array}{c|c} V & I_p \\ \hline O_q & W^T \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{R})$ et on suppose $\boxed{W^T V \in GL_q(\mathbb{R})}$ inversible.

3) [1.5 pt] Montrer que M est inversible, c'est-à-dire $M \in GL_{p+q}(\mathbb{R})$.

4) [1.5 pt] Montrer que $(\operatorname{Im} V) \oplus \operatorname{Ker}(W^T) = \mathbb{R}^p$.

5) [2 pts] (★) On pose $P = \left(\begin{array}{c|c} V & O_p \end{array}\right) M^{-1} \left(\begin{array}{c} I_p \\ \hline O_q \end{array}\right) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Montrer que P est la matrice de la projection sur $(\operatorname{Im} V)$ parallèlement à $(\operatorname{Im} W)^{\perp}$.

$\boxed{\textbf{Exercice E}}$ (*exercice supplémentaire*)

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire (discrète) à valeurs réelles.

1) (★) Montrer que X admet une médiane, c'est-à-dire qu'il existe un réel m tel que

$$P(X \geq m) \geq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P(X \leq m) \geq \frac{1}{2}$$

Indication : Considérer $\Delta = \left\{ t \in \mathbb{R} \mid P(X \geq t) \geq \frac{1}{2} \right\}$.

2) On suppose X de moment d'ordre 2 fini. On pose $\mu = E(X)$ et $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Montrer que $P(\ (|X - \mu| \geq |m - \mu|) \geq \frac{1}{2}$. En déduire que $|m - \mu| \leq \sqrt{2}\sigma(X)$.