Interrogation n°18 bis. *Barème sur 21.5 pts*

Exercice A. Équation de la chaleur (*extrait ENS MP 2016 épreuve C*)

Soient des réels $T > 0$ et $s \geq 1$. On dit qu'une fonction $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ est de la classe de Gevrey d'ordre s ssi f est de classe C^∞ et qu'il existe $M > 0$ et $R > 0$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0, T], \quad \left| f^{(n)}(t) \right| \leq \frac{M(n!)^s}{R^n}$$

On note $G_s(T)$ l'ensemble des fonctions $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ de la classe de Gevrey d'ordre s.

1. [1.5 pt] Soient $s \geq 1$ et des entiers $0 \leq k \leq n$. Montrer que $(k!)^s((n-k)!)^s \leq (n!)^s$.

2.a) [2 pts] Montrer que $G_s(T)$ est un sous-espace vectoriel (de l'espace des fonctions C^∞ sur $[0, T]$).

2.b) [2.5 pts] Montrer que si f et $g \in G_s(T)$, alors $fg \in G_s(T)$.

3. Soit $f \in G_s(T)$ avec $s \in]1, 2[$ et $T > 0$. On considère

$$\forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}, \qquad H(t, x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f^{(n)}(t) \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

3.a) [2.5 pts] Montrer que $H(t, x)$ est bien défini pour tout $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$.

3.b) [3 pts] Montrer que $\dfrac{\partial H}{\partial t}$ et $\dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2}$ sont bien définies et que $\dfrac{\partial H}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2}$ sur $[0, T] \times \mathbb{R}$.

3.c) [2 pts] (★) Montrer que H est continue sur $[0, T] \times \mathbb{R}$.

Exercice B. Borne inférieure sur une partie convexe fermée (*extrait X MP 2018 épreuve B*)

On note $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ le sev des polynômes réels de degré $\leq n$.

On dit que le polynôme $P(X)$ est pair ssi $P(X) = P(-X)$.

On note A_n l'ensemble des polynômes $P \in E_n$ tels que

$$P(1) = P(-1) = 1 \text{ et } \forall x \in [-1, 1],\ P(x) \geq 0$$

On considère la forme linéaire $\phi : E_n \to \mathbb{R} \;\; P \longmapsto \int_{-1}^{+1} P(t)\, dt$.

On pose $\mu_n = \inf\{\phi(P),\ P \in A_n\}$.

1.a) [1 pt] Montrer que A_n est une partie convexe de E_n.

1.b) [1.5 pt] Montrer que $\|P\|_1 = \int_{-1}^{+1} |P(t)|\ dt$ définit une norme sur E_n.

1.c) [1.5 pt] Montrer que A_n est une partie fermée de E_n.

On rappelle que les normes sont équivalentes en dimension finie.

2.a) [1 pt] On pose $K_n = \{P \in A_n \mid \|P\|_1 \leq 2\}$.

Montrer que K_n n'est pas vide et que $\mu_n = \inf\{\phi(P),\ P \in K_n\}$.

2.b) [1 pt] En déduire que μ_n est atteinte sur A_n, c'est-à-dire qu'il existe $P \in A_n$ tel que $\phi(P) = \mu_n$.

On note $B_n = \{P \in A_n \mid \phi(P) = \mu_n\}$ l'ensemble des polynômes où μ_n est atteinte.

2.c) [1 pt] Montrer que B_n est convexe.

2.d) [1 pt] Montrer que B_n contient un polynôme pair.