**Interrogation n°17.** *Barème sur 23.5 pts*

On note $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\|\ \|$ la norme euclidienne associée.

**1)** [2.5 pts] Soit $\varphi : [0,+\infty[ \to \mathbb{R}$ une application de classe $C^1$ vérifiant $\varphi'(0) = 0$.

On pose $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ \ (x,y) \longmapsto \varphi(\sqrt{x^2+y^2})$. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$. Montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$.

**2)** [1 pt] On pose $U = \mathbb{R}^n \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ et $f : X = (x_1,...,x_n) \longmapsto \|X\| = \sqrt{x_1^2+...+x_n^2}$.

Pour $X \in U$, calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(X)$ et en déduire une expression simple de $\nabla f(X)$.

**3)** [3 pts] *Cas particuliers du théorème des extrema liés.* L*es deux questions sont indépendantes*

a) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$. On considère $S$ le cercle unité de $\mathbb{R}^2$.

On suppose que $\sup\{f(X),\ X \in S\}$ est atteint en un point $X_0 = (\cos\theta_0, \sin\theta_0) \in S$.

Montrer que $\nabla f(X_0)$ est colinéaire à $X_0$.

*Indication* : Considérer $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $g(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta)$, et utiliser le fait que $g$ atteint son maximum en $\theta_0$.

b) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$.

On considère $H$ un hyperplan affine d'équation $\sum_{i=1}^n a_i x_i = b$, avec $n = (a_1,...,a_n) \neq \overrightarrow{0}$.

On suppose que $\sup\{f(X),\ X \in H\}$ est atteint en un point $X_0$. Montrer que $\nabla f(X_0)$ est colinéaire à $n$.

*Indication* : Considérer $X_0 + tV$, où $V$ appartient à l'hyperplan $H_0 = n^{\perp}$, c'est-à-dire $H_0 : \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$.

**4)** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ \ (x,y) \to f(x,y)$ de classe $C^1$. On pose $F(x,y) = \int_0^x f(t,y)\,dt$, qu'on admet de classe $C^1$.

a) [1 pt] Expliciter sans justification $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)$.

b) [1.5 pt] On pose $J(x) = \int_0^x f(t,x)\,dt$. Déduire de a) que $J$ est de classe $C^1$ et calculer $J'(x)$.

**5)** [2.5 pts] Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\quad X = (x,y) \longmapsto f(X) = f(x,y)$ de classe $C^2$.

On pose $V(X) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ et $H(X) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R})$.

a) On fixe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On pose $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(t) = f(tx, ty)$. Calculer $g'(t)$ et $g''(t)$.

b) Montrer que $f(X) = f(\overrightarrow{0}) + \left\langle V(\overrightarrow{0}), X \right\rangle + \int_0^1 (1-t)\ \langle X, H(tX)X\rangle\ dt$.

**6)** [2 pts] Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\quad X = (x_1,...,x_n) \longmapsto f(x_1,...,x_n)$ de classe $C^2$.

On note $V(X)$ le gradient de $f$ en $X$ et $H(X) = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X)\right)_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$ la matrice Hessienne de $f$ en $X$.

*Aucune justification n'est demandée dans les questions suivantes.*

a) On note $H_j(X)$ la $j$-ième colonne de $H(X)$. Exprimer $H_j(X)$ en fonction de $V(X)$.

b) Exprimer $H(X)$ comme la matrice jacobienne d'une fonction vectorielle qu'on précisera.

c) Expliciter la différentielle $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de $X \longmapsto V(X)$ en $\overrightarrow{0}$.

d) Donner le $DL_1(\overrightarrow{0})$ de $V(X)$ en fonction de $X$ et de $H(\overrightarrow{0})$.

**7)** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$.

a) [1 pt] On suppose que $f$ admet le $DL_1(X_0)$ : $f(X_0 + X) = f(X_0) + \langle V, X\rangle + \mathfrak{o}\,(\|X\|)$, où $V \in \mathbb{R}^n$ vecteur.

Montrer avec soin qu'on a nécessairement $\nabla f(X_0) = V$.

b) [2 pts] Soit $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad X \longmapsto AX$ une application linéaire, où $A = (a_{ij})_{1\leq j\leq n, 1\leq j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On pose $g(X) = f(u(X)) = f(AX)$. On pose $V = \nabla f\ (u(X))$ et $W = \nabla g\ (X)$.

Exprimer $W$ en fonction de $A^T$ et de $V$ en utilisant deux méthodes :

(i) En calculant les dérivées partielles $\dfrac{\partial g}{\partial x_j}$ de $g(x_1, ..., x_n) = f(y_1, ..., y_n)$, où $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$.

(ii) En utilisant un $DL_1(\overrightarrow{0})$ de $g(X)$ et la question a).

**8)** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon $R$. On pose $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ pour tout $|z| < R$.

On note $D(R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ le disque ouvert de centre 0 et de rayon $R$.

On considère $F : D(R) \to \mathbb{C}$ définie par $\boxed{F(x, y) = f(x + iy)}$.

On considère $g$ la série dérivée, définie par $\forall z \in D(R)$, $g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$.

a) [3 pts] Montrer que la dérivée partielle $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)$ existe en tout point $(x_0, y_0) \in D(R)$.

*Attention* : On pourra poser $\forall n \in \mathbb{N}$, $\omega_n(x) = a_n(x + iy_0)^n$ définies sur un intervalle *bien choisi*

Il est conseillé de considérer aussi un réel $\rho$ vérifiant $|x_0 + iy_0| < \rho < R$.

b) [1 pt] Montrer que l'application $(x, y) \longmapsto \dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y)$ est continue sur $D(R)$.

*NB* : On suppose connues les propriétés de continuité des séries de fonctions continues définies sur $A \subset \mathbb{R}^2$ : si la série converge uniformément, la somme de la série est continue.

**9)** On considère $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$, où $U$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On suppose $\|\nabla f(X)\| = 1$.

a) [1.5 pt] Soit $X$ et $Y \in U$ tels que $[X, Y] \subset U$. Montrer que $|f(Y) - f(X)| \leq \|Y - X\|$.

Préciser sans justification les cas d'égalité.

b) [1.5 pt] ($\bigstar$) On considère une fonction $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \ t \longmapsto X(t)$ vérifiant le système différentiel

$$X'(t) = \nabla f\ (X(t))$$

Montrer que $|f(X(t)) - f(X(s))| = |t - s| = \|X(t) - X(s)\|$.

Que peut-on en déduire quant au gradient $\nabla f$ sur le segment $[X(t), X(s)]$ ?

c) *Question supplémentaire* ($\bigstar$)

On prend $U = \mathbb{R}^n$. On admet *le théorème de Cauchy-Lipschitz* :

Pour tout $X_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe une unique fonction $t \longmapsto X(t)$ vérifiant $X'(t) = \nabla f\ (X(t))$ et $X(0) = X_0$.

Sans détailler tous les arguments, montrer que $f$ est affine.

*Remarque culturelle* : L'exemple du 2) montre que la propriété est fausse lorsque $U = \mathbb{R}^n \setminus \{\overrightarrow{0}\}$.