Interrogation n°16. *Barème sur 24 pts*

1) [3 pts] a) On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique $(X \mid Y) = X^T Y$.

Justifier que pour $X \in \mathbb{R}^n$ fixé, l'application $u : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \;\; A \longmapsto (X \mid AX)$ est continue.

b) On note $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer brièvement que $O_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte (= fermée bornée) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

c) On note $S_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles symétriques positives.

Montrer brièvement que $S_n^+(\mathbb{R})$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Indication : On rappelle qu'une intersection (arbitraire) de fermés est fermée.

2) [2 pts] Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ deux matrices semblables. Montrer que

$$\lim_{k\to+\infty} A^k = O_p \;\text{ ssi }\; \lim_{k\to+\infty} B^k = O_p$$

Remarque : Il y a plusieurs preuves possibles, l'une utilisant une application linéaire (donc continue), une autre utilisant une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qu'on notera $\| \;\|$ et dont on sait qu'elle existe.

3) On munit $\mathbb{C}^n$ de la norme $\|X\| = \sum_{i=1}^n |x_i|$ et on munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de la norme $N(A) = \sup_{X\neq 0} \dfrac{\|AX\|}{\|X\|}$.

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\rho(A) = \max_{\lambda\in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$ le rayon spectral de A.

a) [1 pt] Montrer que $\rho(A^k) = \rho(A)^k$.

b) [1.5 pt] Montrer que $N(A^k) \geq \rho(A)^k$. En déduire que si $\lim_{k\to+\infty} A^k = O_n$, alors $\rho(A) < 1$.

c) [2 pts] Montrer que $N(A) = \max(\|A_1\|, ..., \|A_n\|)$, c'est-à-dire $N(A) = \max_{1\leq j\leq n}(\sum_{i=1}^n |a_{ij}|)$.

Indications : On posera $M = \max(\|A_1\|, ..., \|A_n\|)$. On rappelle que si $Y = AX$, alors $Y = \sum_{j=1}^n x_j A_j$.

d) [1 pt] Montrer que N est une norme d'algèbre, c'est-à-dire $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $N(AB) \leq N(A)N(B)$.

e) [1 pt] Pour $P \in GL_n(\mathbb{C})$, on pose $N_P(A) = N(P^{-1}AP)$. On vérifie (*admis ici*) que N_p est une norme.

Montrer que si $N_P(A) < 1$, alors $\lim_{k\to+\infty} A^k = O_n$.

f) (★) *On admet la propriété de diagonalisation à ε près de toute matrice A : pour tout $\varepsilon > 0$, la matrice A est semblable à une matrice triangulaire supérieure T dont les coefficients non diagonaux sont en module $\leq \varepsilon$.*

[1.5 pt] Montrer que si $\rho(A) < 1$, alors $\lim_{k\to+\infty} A^k = O_n$.

4) Soit $(E, \| \;\|)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. On note S la sphère unité.

Soit u un endomorphisme symétrique, c'est-à-dire $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$.

On va prouver le théorème spectral (ici non supposé connu) : u est diagonalisable dans une BON.

On pose $U = E \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ et on considère la fonction continue $f : U \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{\langle x, u(x)\rangle}{\|x\|^2}$.

a) [1.5 pt] Montrer avec soin que f est bornée et qu'il existe $x_0 \in S$ tel que $f(x_0) = \sup_{x\in U} f(x)$.

b) [1 pt] Soit $h \in E$. Montrer que $\varphi : t \longmapsto f(x_0 + th)$ est bien définie au voisinage de 0 et que $\varphi'(0) = 0$.

c) [0.5 pt] On admet le $DL_1(0)$ de $\varphi(t)$:

$$\forall t \in V, \varphi(t) = \frac{\langle x_0, u(x_0)\rangle + 2t\langle u(x_0), h\rangle + t^2\|h\|^2}{1 + 2t\langle x_0, h\rangle + t^2\|h\|^2} = \langle x_0, u(x_0)\rangle + 2\left(\langle u(x_0), h\rangle - \langle x_0, u(x_0)\rangle\langle x_0, h\rangle\right)t + \mathfrak{o}(t).$$

Déduire de b) qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall h \in E,\ \langle u(x_0), h\rangle = \lambda\langle x_0, h\rangle$.

d) [0.5 pt] En déduire que x_0 est un vecteur propre de u.

e) *Question supplémentaire* : Démontrer le théorème spectral.

5) On munit $\mathbb{C}^p$ de la norme $\|X\| = \sum_{i=1}^p |x_i|$ et $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ de la norme d'algèbre $N(A) = \sup_{X\neq 0} \dfrac{\|AX\|}{\|X\|}$.

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ vérifiant $\boxed{N(A) \leq 1}$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{B_n = \dfrac{I_p + A + ... + A^n}{n+1} = \dfrac{\sum_{k=0}^n A^k}{n+1}}$.

On se propose de prouver que $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

a) [0 pt] Que vaut B_nX lorsque $X \in \operatorname{Ker}(A - I_p)$?

b) [1.5 pt] Montrer que pour tout $X \in \operatorname{Im}(A - I_p)$, $\lim_{n\to+\infty} B_nX = 0$.

Indication : Justifier d'abord qu'il existe un vecteur Y tel que $B_nX = \frac{1}{n+1}(A^{n+1}Y - Y)$.

c) [1 pt] En déduire que $\operatorname{Im}(A - I_p) \oplus \operatorname{Ker}(A - I_p) = \mathbb{C}^p$.

d) [1 pt] Montrer que $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et préciser la nature de la matrice limite.

6) *Extension du domaine du lemme de Rolle*

Soit $X : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ une fonction de classe C^1 à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ telle que $\boxed{X(0) = X(1)}$.

Remarque : L'exemple $X(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ montre qu'on peut avoir $\forall t \in [0, 1]$, $X'(t) \neq \overrightarrow{0}$.

a) [1 pt] Soit v un vecteur de $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe $t \in [0, 1]$ tel que $\langle X'(t), v\rangle = 0$.

Remarque : $\langle\ ,\ \rangle$ désigne le produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

b) [1 pt] On pose $\Delta = \{X'(t),\ t \in [0, 1]\}$. On note $C(\Delta)$ l'enveloppe convexe de Δ.

En considérant $\int_0^1 X'(t)\, dt$, montrer que $\overrightarrow{0}$ appartient à l'adhérence de $C(\Delta)$.

7) On considère le DSE de $\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_nx^n$ sur $]-1, 1[$.

a) [0.5 pt] Expliciter *sans justification* les valeurs de c_0, c_1 et c_2.

b) [1 pt] On munit $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ d'une norme d'algèbre, c'est-à-dire vérifiant $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$.

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que $\|A\| < 1$. Justifier l'existence de $M = \sum_{n=0}^{+\infty} c_nA^n$.

c) *Question supplémentaire* (★) Avec les hypothèses de b), montrer que $M^2 = I_p + A$.

Indication : Noter d'abord que les familles $(|c_n(A^n)_{i,j}|)_{n\in\mathbb{N}}$ sont sommables, où B_{ij} désigne le coefficient d'indice (i, j) de la matrice B. Et considérer $\sum_{j=1}^p \left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(A^n)_{i,j}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(A^n)_{j,k}\right)$

d) [0.5 pt] On prend $p = 3$, et on considère $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente.

Trouver une matrice M (exprimée à l'aide de N) telle que $M^2 = I_p + N$.

Justifier votre réponse (sans admettre c)).