

Interrogation n°10. Barème sur 24.5 pts

1) [2 pts] Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

On note $S = \{y \in E \mid \|y\| = 1\}$ la sphère unité. Soient $x \in E$ et $u \in O(E)$ une isométrie. Calculer

$$m = \sup_{y \in S} \langle x, u(y) \rangle$$

2) [2 pts] Soit E un espace préhilbertien, c'est-à-dire un $\mathbb{R}$ -ev muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Soient $x \in E$ et $(e_1, \dots, e_n)$ une famille orthonormée de E .

Montrer que $\sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle^2 \leq \|x\|^2$, avec égalité ssi $x \in F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$.

Remarque : On pourra utiliser *sans justification toute* propriété du cours.

3) [2 pts] Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe $A \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $M = A^T A$

(ii) Il existe un espace euclidien E de dimension n et une base $(x_1, \dots, x_n)$ dans E telle que

$$M = (\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$$

4) [2 pts] Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale et triangulaire supérieure.

On veut montrer de deux façons que A est diagonale de la forme $(\pm E_1, \dots, \pm E_n)$:

a) On sait que A^{-1} est triangulaire supérieure. En déduire la propriété.

b) Montrer que $\text{Sp}(A) \subset \{-1, 1\}$. En déduire une deuxième preuve.

5) [2 pts] On note E l'ensemble des fonctions continues f sur $[0, +\infty[$ telles que la fonction $t \mapsto f(t)^2 \exp(-t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

a) Montrer que si f et $g \in E$, alors $t \mapsto f(t)g(t) \exp(-t)$ est intégrable.

On en déduit aisément (*admis ici*) que E est un sous-espace vectoriel de $C^0([0, +\infty[, \mathbb{R})$.

b) Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant la propriété $(\mathcal{E})$:

$$(\mathcal{E}) : \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \int_0^{+\infty} P(t) t^k e^{-t} dt = 0$$

Remarques : Un polynôme unitaire est un polynôme non nul de coefficient dominant 1.

On pourra faire intervenir un produit scalaire qu'on définira sans justification

6) Soit E un espace euclidien de dimension n muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Soient x, y, z trois vecteurs unitaires tels que $\langle x, y \rangle$, $\langle x, z \rangle$ et $\langle y, z \rangle$ sont tous les trois strictement négatifs.

On note p la projection orthogonale sur l'hyperplan $H = z^\perp$ et q la projection orthogonale sur $\mathbb{R}z$.

a) [1 pt] Expliciter *sans justification* $q(x)$ et $d(x, H)$ en fonction de x et z .

b) [1 pt] Montrer que $\langle p(x), p(y) \rangle < 0$.

c) *Question supplémentaire hors-interrogation*

Une famille $(x_1, \dots, x_p)$ est obtusangle ssi $\forall i \neq j, \langle x_i, x_j \rangle < 0$. Montrer que dans ce cas, $p \leq n + 1$.

7) Soit E euclidien, et F un sev de E de dimension p .

On considère une *base orthonormée* $(f_1, \dots, f_{n-p})$ du supplémentaire orthogonal $F^\perp$.

a) [0.5 pt] Soit $x \in E$. Exprimer sans justification $d(x, F)^2$ en fonction des $\langle f_j, x \rangle$.

b) [2 pts] Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une *base orthonormée* de E . Montrer que $\sum_{i=1}^n d(e_i, F)^2 = n - p$.

8) [2 pts] On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

Montrer que A est la matrice d'une symétrie orthogonale par rapport à un sev F à préciser.

9) [2 pts] On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$. On a $\|A\|^2 = \text{tr}(A^T A)$.

Soit $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une matrice réelle diagonale. *Les deux questions sont indépendantes*

a) Soit $U = (u_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\|U - D\|^2 = \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 - 2 \text{tr}(DU) + n$.

b) Montrer que $\forall U \in O_n(\mathbb{R}), \text{tr}(DU) \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i|$, et donner $U \in O_n(\mathbb{R})$ pour laquelle il y a égalité.

10) Soit $(a_1, \dots, a_n)$ une base de E euclidien.

a) [1 pt] On définit $V(a_1, \dots, a_n) = |\det_{\mathcal{B}}(a_1, \dots, a_n)|$, où $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E .

Montrer que $|\det_{\mathcal{B}}(a_1, \dots, a_n)|$ ne dépend pas du choix de $\mathcal{B}$, ce qui valide la définition.

b) [1 pt] On note $(b_1, \dots, b_n)$ la base orthogonale obtenue par le procédé de Gram-Schmidt.

Autrement dit, $\boxed{b_k \text{ est le projeté orthogonal de } a_k \text{ sur } \text{Vect}(a_1, \dots, a_k)^\perp}$.

Exprimer *sans justification* le vecteur b_k en fonction de a_k et des b_j pour $j < k$.

c) [1 pt] Montrer que $\det_{\mathcal{B}}(a_1, \dots, a_n) = \det_{\mathcal{B}}(b_1, \dots, b_n)$.

d) [1 pt] En déduire l'inégalité d'Hadamard : $V(a_1, \dots, a_n) = \|b_1\| \dots \|b_n\| \leq \|a_1\| \dots \|a_n\|$.

11) Soient a et b deux vecteurs distincts et de même norme dans E euclidien muni du ps $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

a) [0 pt] Montrer que $a + b$ et $a - b$ sont orthogonaux.

b) [1 pt] Soit s une réflexion, c'est-à-dire une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan H .

On suppose que $s(a) = b$. Montrer que $H = (a - b)^\perp$.

c) [1 pt] Réciproquement, on suppose que s est la réflexion d'hyperplan $H = (a - b)^\perp$.

Montrer que $s(a) = b$.

12) *Question supplémentaire hors-interrogation*

On considère E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$.

Soit $\omega \in E$. Pour f et $g \in E$, on pose $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) g(t) \omega(t) dt$.

Donner sans justification une CNS sur ω pour que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ soit un produit scalaire.