

Interrogation n°6. Barème sur 24.5 pts

On sait que pour tout $\alpha > 0$, il existe $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$.

1) [1 pt] Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante et positive.

Montrer que $\sum e^{in\theta}(a_{n+1} - a_n)$ converge.

2) a) [1 pt] Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(K)$. Montrer que $\text{rg}(AB) \leq \min(\text{rg } A, \text{rg } B)$.

b) [1.5 pt] Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\text{rg } M \leq 1$

(ii) il existe deux vecteurs X et $Y \in K^n$ tels que $M = XY^T$, c'est-à-dire $M = (x_i y_j)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$.

3) a) [1 pt] Montrer (à partir de la définition initiale des familles libres) que si une famille $(x_1, \dots, x_p)$ est liée, alors un des vecteurs est combinaison linéaire des suivants.

b) [1.5 pt] On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soit a et b deux réels distincts.

On pose $P_k = (X - a)^k (X - b)^{n-k}$. Montrer que $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de E .

4) [1.5 pt] Soit un espace vectoriel $E = F \oplus G$ et deux applications linéaires $v : F \rightarrow E'$ et $w : G \rightarrow E'$.

On note p la projection sur F parallèlement à G , et q la projection sur G parallèlement à F .

Pour $u : E \rightarrow E'$ linéaire, on note $u|_F$ l'application linéaire de F dans E' définie par $\forall y \in F, u|_F(y) = u(y)$.

a) Expliciter *sans justification* une application linéaire $u : E \rightarrow E'$ telle que $u|_F = v$ et $u|_G = w$.

On exprimera u en fonction de p, q, v et w .

b) On considère la matrice $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} u$ où $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ base adaptée à $E = F \oplus G$ et $\mathcal{C}$ base de E' .

Préciser *sans justification* le lien entre A et les applications linéaires v et w .

5) [2.5 pts] Soit $\omega :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur $]0, 1]$ et bornée sur $[1, +\infty[$.

On considère $\forall a > 0, g(a) = \int_0^{\sqrt{a}} \left(1 - \frac{t^2}{a}\right)^a \omega(t) dt$. Montrer que $\lim_{a \rightarrow +\infty} g(a) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \omega(t) dt$.

6) a) [0.5 pt] Exprimer *sans justification* $\lambda = \int_0^{+\infty} \exp(-t^3) dt$ en fonction de $\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$.

b) [2 pts] On considère $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}$ et $J_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(2+t^3)^n}$.

Donner *sans justification* un équivalent de I_n lorsque $n \rightarrow +\infty$, qu'on exprimera à l'aide de λ .

Exprimer J_n en fonction de I_n (d'où on pourrait déduire de ce qui précède un équivalent de J_n).

7) La question c) est indépendante des questions précédentes.

a) [1 pt] Soient $x > 0$ et $p \in \mathbb{N}$. Justifier que $\varphi : t \mapsto \frac{|\ln t|^p t^{x-1}}{1+t} dt$ est intégrable sur $]0, 1]$.

b) [1.5 pt] On considère $\forall x > 0, f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$.

Expliciter *sans justification* la propriété de domination permettant de prouver que f est C^1 sur $]0, +\infty[$.

Nota bene : On ne demande ici ni d'énoncer ni de vérifier les autres hypothèses.

c) [1.5 pt] Soit $\Omega = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > 0\}$. Pour $z \in \Omega$, on pose $f(z) = \int_0^1 \frac{t^{z-1}}{1+t} dt$.

Montrer que f est définie et continue sur Ω .

Remarque : Pour prouver la continuité, on utilisera la caractérisation séquentielle : soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans Ω convergeant vers $z \in \Omega$. Il s'agit de prouver que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(z_n) = f(z)$.

8) a) [0.5 pt] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-nt} dt$ en fonction de $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$.

b) [1.5 pt] Montrer que $\forall \alpha > 1, \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{e^t - 1} dt = \Gamma(\alpha)F(\alpha)$, où $F(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

c) [1.5 pt] Montrer que $\forall \alpha > 0, \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{e^t + 1} dt = \Gamma(\alpha)G(\alpha)$, où $G(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$.

9) Soit $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R} (x, y) \mapsto f(x, y)$ une application continue sur $[a, b] \times [c, d]$.

a) [0.5 pt] On considère $g : x \mapsto \int_c^d f(x, u) du$.

Proposer *sans justification* une fonction de domination φ permettant de prouver que g est continue sur $[a, b]$.

b) [1.5 pt] On considère $G(x) = \int_a^x \left(\int_c^d f(t, u) du \right) dt$ et $H(x) = \int_c^d \left(\int_a^x f(t, u) dt \right) du$.

Montrer brièvement que G et H sont de classe C^1 sur $[a, b]$, et que $G'(x) = H'(x)$.

c) [0.5 pt] En déduire le théorème de Fubini : $\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$.

10) [1.5 pt] (★)

Soit f continue, positive, croissante sur $[0, 1]$. On note s le réel tel que $[0, s] = \{t \in [0, 1] \mid f(t) = 0\}$.

On pose $\forall x \geq 0, \varphi(x) = \int_0^1 \sqrt{f(t) + x^2} dt$. Calculer $\varphi'(0)$.