Interrogation n°27bis. Corrigé

Exercice A. Une application des polynômes cousins de Tchebychev

1) a) (*unicité*) Deux polynômes qui coïncident sur l'ensemble infini $[-2, 2]$ sont égaux.

(*existence*) On définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = 1$ et $T_{n+1}(x) = xT_n(x) - T_{n-1}(x)$.

Par récurrence d'ordre 2, T_n est unitaire et de degré n.

De plus, $2\cos(nt + t) + 2\cos(nt - t) = (2\cos t)(2\cos nt)$.

Par récurrence d'ordre 2, on a donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $T_n(2\cos t) = 2\cos(nt)$.

b) *Première méthode* :

On pose $R_n(x) = (-1)^n T_n(-x)$. Il s'agit donc de prouver que $R_n(x) = T_n(x)$.

On vérifie que les $R_n(x) = (-1)^n T_n(-x)$ vérifient la même relation de récurrence que les $T_n(x)$:

On a $R_0(x) = 1$ et $R_1(x) = x = T_0(x)$.

On a $R_{n+1}(x) = (-1)^{n+1}T_n(-x) = -x(-1)^{n+1}T_n(-x) - (-1)^{n-1}T_{n-1}(-x)$, donc $R_{n+1}(x) = xR_n(x) - R_{n-1}(x)$.

Donc par unicité de la suite définie par récurrence d'ordre 2, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $R_n(x) = T_n(x)$.

Seconde méthode :

On a $T_n(-\cos t) = T_n(\cos(t + \pi)) = \cos(nt + n\pi) = (-1)^n(\cos nt) = (-1)^n T_n(\cos t)$.

Les polynômes $T_n(-x)$ et $(-1)^n T_n(x)$ coïncident sur $[-2, 2]$ infini, donc sont égaux (sur $\mathbb{R}$).

c) La formule de trigo $2\operatorname{ch}(nt + t) + 2\operatorname{ch}(nt - t) = (2\operatorname{ch} t)(2\operatorname{ch} nt)$ donne aussi $T_n(2\operatorname{ch} t) = 2\operatorname{ch}(nt)$.

D'autre part, par b), $T_n(-\operatorname{ch} nt) = (-1)^n T_n(\operatorname{ch} t) = 2(-1)^n \operatorname{ch}(nt)$.

2) - Avec $a \neq 0$, $T_n(aX + b)$ est de degré n et de coefficient dominant a^n.

Donc Q est de degré n et le coefficient en X^n est $\left(\frac{\mu - \lambda}{4}\right)^n \left(\frac{\mu - \lambda}{4}\right)^n = 1$.

- Soit $x \in [\lambda, \mu]$. On a $2x \in [2\lambda, 2\mu]$, donc $y = 2\,\frac{2x - (\lambda + \mu)}{\mu - \lambda} \in [-2, 2]$.

Or, par 1), pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|T_n(2\cos t)| \leq 2$, donc pour tout $y \in [-2, 2]$, $|T_n(y)| \leq 2$.

Donc $|Q(x)| = |T_n(y)| \left(\frac{\mu - \lambda}{4}\right)^n \leq 2\left(\frac{\mu - \lambda}{4}\right)^n$.

3) a) On se place dans une BON $(e_1, ..., e_n)$ de vecteurs propres de A.

On note $(x_1, ..., x_n)$ les coordonnées de X dans cette base orthonormée.

On a $X = \sum_{j=1}^n x_j e_j$ et $AX = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j e_j$.

Donc $\|AX\|^2 = \sum_{j=1}^n (\lambda_j x_j)^2 \leq \mu \sum_{j=1}^n x_j^2 = \mu \|X\|^2$, où $\mu = \sup_{1\leq j\leq n} |\lambda_j|$.

Donc $|||A||| \leq \mu$.

De plus, la valeur est atteinte : il existe j tel que $\mu = |\lambda_j|$, et $\|Ae_j\|^2 = |\lambda_j| = \mu$ et $e_j \in S$.

b) Il suffit de trouver un polynôme pour lequel l'inégalité est vraie. Supposons d'abord $\boxed{\lambda_1 < \lambda_n}$.

On considère le polynôme Q défini au 2) par $Q(X) = \left(\frac{\lambda_n - \lambda_1}{4}\right)^n T_n\left(2\,\frac{2X - (\lambda_1 + \lambda_n)}{\lambda_n - \lambda_1}\right)$.

La matrice $Q(A)$ est symétrique et de valeurs propres $Q(\lambda_1), ..., Q(\lambda_n)$.

Par a), on a $|||Q(A)||| = \sup_{1\leq j\leq n} |Q(\lambda_j)|$.

Mais pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, $\lambda_j \in [\lambda_1, \lambda_n]$, donc par 2), $|Q(\lambda_j)| \leq 2\left(\frac{\lambda_n - \lambda_1}{4}\right)^n$.

On en déduit $|||Q(A)||| \leq 2\left(\frac{\lambda_n - \lambda_1}{4}\right)^n$.

Dans le cas où $\lambda_1 = \lambda_n$, alors $A = \lambda_1 I_n$ et le polynôme $Q(x) = (x - \lambda_1)^n$ donne $|||Q(A)||| = 0$.

Exercice B. Formule de Taylor d'une fonction de plusieurs variables.

1) *Première méthode* (en utilisant la forme quadratique) :

On a $X^T AX = (X \mid AX) = x(ax + by) + y(bx + cy)$, c'est-à-dire $\boxed{X^T AX = ax^2 + 2bxy + cy^2}$.

De plus, $|2xy| \leq (x^2 + y^2)$. D'où $\left|X^T AX\right| \leq \max(|a|, |c|)(x^2 + y^2) + |b|(x^2 + y^2) = \mu \|X\|^2$.

Seconde méthode (en utilisant les valeurs propres) :

En diagonalisant la matrice A dans une base orthonormée, on montre aisément (cf exo classique à connaître) que $\left|X^T AX\right| \leq m \|X\|^2$, où $m = \max\{|\lambda|, \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$.

Il suffit donc de prouver que **toute valeur propre de A vérifie** $|\lambda| \leq \mu$.

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. Il existe $(x, y) \neq (0, 0)$ tel que $\lambda X = AX$, c'est-à-dire $\begin{cases} \lambda x = ax + by \\ \lambda y = bx + cy \end{cases}$

Si $|x| \geq |y| > 0$, on a $|\lambda| \leq |a| + |b| \dfrac{|y|}{|x|} \leq |a| + |b|$. Sinon, $|y| > |x|$, et on a $|\lambda| \leq |b| + |c|$.

Donc $|\lambda| \leq \max(|a| + |b|, |b| + |c|) = \mu$.

Variante : λ est racine du polynôme caractéristique de A, donc $\lambda^2 - (a + c)\lambda + (ad - bc) = 0$.

Donc $\lambda = \dfrac{a + c}{2} \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{(a - c)^2 + 4b^2}$.

Comme $\sqrt{|x|^2 + |y|^2} \leq |x| + |y|$ (mettre au carré), on obtient $|\lambda| \leq \dfrac{|a + c|}{2} + \dfrac{|a - c|}{2} + |b| = \mu$.

Variante : On a $(\lambda - a)(\lambda - c) = b^2$. Donc $(|\lambda| - |a|)(|\lambda| - |c|) = b^2$

Si $|\lambda| \leq r = \max(|a|, |c|)$, alors a fortiori $|\lambda| \leq \mu$.

Si $|\lambda| > r$, $(|\lambda| - r)^2 \leq (|\lambda| - |a|)(|\lambda| - |c|) = b^2$, donc $|\lambda| \leq r + |b|$.

2) On fixe $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Posons $\varphi(t) = f(tX) = f(tx, ty)$.

On a $\varphi'(t) = x\dfrac{\partial f}{\partial x}(tX) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(tX)$ et $\varphi''(t) = x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(tX) + 2xy\dfrac{\partial f}{\partial x \partial y}(tX) + y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(tX)$.

Ainsi, $\varphi'(t) = X^T\ \nabla f(tX)$ et $\varphi''(t) = X^T\ H(tX)\ X$.

Or, par **la formule de Taylor Lagrange avec reste intégral appliquée à φ à l'ordre 2,**

$$\varphi(1) = \varphi(0) + (1 - 0)\varphi'(0) + \int_0^1 (1 - t)\ \varphi''(t)\ dt$$

Ce qui s'écrit aussi : $f(X) = f(\overrightarrow{0}) + X^T\ \nabla f(\overrightarrow{0}) + \int_0^1 \left(X^T\ H(tX)\ X\right)\ (1 - t)\ dt$.

3) Soit $\varepsilon > 0$.

On pose $a(X) = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X) - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\overrightarrow{0})\right)$, $b(X) = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X) - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\overrightarrow{0})\right)$ et $c(X) = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X) - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\overrightarrow{0})\right)$.

Ainsi, $A(X) = H(X) - H(\overrightarrow{0}) = \begin{pmatrix} a(X) & b(X) \\ b(X) & c(X) \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R})$.

On a $\int_0^1 \left(X^T\ H(\overrightarrow{0})\ X\right)\ (1 - t)\ dt = \left(X^T\ H(\overrightarrow{0})\ X\right) \int_0^1 (1 - t)\ dt = \dfrac{1}{2}\left(X^T\ H(\overrightarrow{0})\ X\right)$.

Par 2), $\left|f(X) - f(\overrightarrow{0}) - X^T\ \nabla f(\overrightarrow{0}) - \dfrac{1}{2}\left(X^T\ H(\overrightarrow{0})\ X\right)\right| \leq R(X) = \int_0^1 X^T A(t) X\ (1 - t)\ dt$.

Or, par 1), $\left|X^T A(t) X\right| \leq \mu(tX)\|X\|^2$, où $\mu(X) = \max(|a(X)|, |c(X)|) + |b(X)|$.

Or, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ sont continues en $\overrightarrow{0}$, donc $\lim_{X \to \overrightarrow{0}} \max(|a(X)|, |c(X)|) + |b(X)| = 0$.

Ainsi, pour $\|X\| \leq \rho$ assez petit, on a $\max(|a(X)|, |c(X)|) + |b(X)| \leq \varepsilon$.

Pour $\|X\| \leq \rho$ et $t \in [0, 1]$, on a $\|tX\| \leq \rho$, donc $\mu(tX) \leq \varepsilon$. Donc $\left|X^T A(t) X\right| \leq \varepsilon \|X\|^2$,