Interrogation n°27 bis. *Barème sur 22.5 pts*

Exercice A. Une application des polynômes de Tchebychev *Durée 50mn*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) a) [2.5 pts] Montrer qu'il existe un unique polynôme réel T_n de degré n et unitaire tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad T_n(2\cos t) = 2\cos(nt)$$

b) [2 pts] Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$.

c) [2.5 pts] Montrer que $\forall t \in \mathbb{R},\ T_n(2\operatorname{ch} t) = 2\operatorname{ch}(nt)$ et $T_n(-2\operatorname{ch} t) = 2(-1)^n \operatorname{ch}(nt)$.

2) [2.5 pts] Soient $\lambda < \mu$. On considère le polynôme défini par

$$Q(x) = \left(\frac{\mu-\lambda}{4}\right)^n T_n\left(2\,\frac{2x-(\lambda+\mu)}{\mu-\lambda}\right)$$

Justifier brièvement que Q est unitaire de degré n et montrer que

$$\forall x \in [\lambda, \mu]\ , \qquad |Q(x)| \leq 2\left(\frac{\mu-\lambda}{4}\right)^n$$

3) Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. On note $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ les valeurs propres de A.

On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique. On note $S = \{X \in \mathbb{R}^n,\ \|X\| = 1\}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^n$.

a) [2 pts] On pose $|||A||| \ = \sup_{X\in S} \|AX\|$. Montrer que $|||A||| \ = \sup_{1\leq j\leq n} |\lambda_j|$.

b) [3 pts] On note E_n l'ensemble des polynômes réels unitaires et de degré n.

On note $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n$ les valeurs propres de A. Montrer que

$$\inf_{P\in E_n} \ |||P(A)||| \ \leq 2\left(\frac{\lambda_n-\lambda_1}{4}\right)^n$$

$\boxed{\textbf{Exercice B. Formule de Taylor d'une fonction de deux variables}}$ *Durée 40mn*

On munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire canonique : Pour tous X et $Y \in \mathbb{R}^2$, $\langle X, Y\rangle = X^T Y$.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad X = (x,y) \longmapsto f(X) = f(x,y)$ une application de classe C^2 définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

On considère le gradient $\nabla f(X)$ et la matrice Hessienne $H(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X) \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R})$.

1) [2.5 pts] ($\bigstar$) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\forall X \in \mathbb{R}^2, \quad \left|X^T A X\right| \leq \mu \left\|X\right\|^2 \ , \ \text{ où } \mu = \max(|a|, |c|) + |b|$$

2) [2.5 pts] Montrer que pour tout $X \in \mathbb{R}^2$,

$$f(X) = f(\overrightarrow{0}) + X^T \ \nabla f(\overrightarrow{0}) + \int_0^1 \left(X^T \ H(tX) \ X\right) \ (1-t) \ dt$$

Indication : Considérer $\forall t \in [0,1]$, $\varphi(t) = f(tX) = f(tx, ty)$.

3) [3 pts] En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $X \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\|X\| \leq \rho \ \Rightarrow \ \left| f(X) - f(\overrightarrow{0}) - X^T \ \nabla f(\overrightarrow{0}) - \frac{1}{2}\left(X^T \ H(\overrightarrow{0}) \ X\right)\right| \leq \varepsilon \left\|X\right\|^2$$

Remarque : D'où le DL au programme : $f(X) = f(\overrightarrow{0}) + X^T \ \nabla f(\overrightarrow{0}) + \frac{1}{2}\left(X^T \ H(\overrightarrow{0}) \ X\right) + \mathfrak{o}\left(\|X\|^2\right)$.