Interrogation n°27. Corrigé

1) a) Pour tout $x \in [0,1]$, on a $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\ dt$ par le théorème fondamental.

Donc $|f(x)| \le |f(a)| + \left|\int_a^x f'(t)\ dt\right| \le |f(a)| + \int_a^x |f'(t)|\ dt \le |f(a)| + |x-a|\ \ \|f'\|_\infty$.

Sachant que a et $x \in [0,1]$, on a $|x-a| \le 1$, d'où on obtient bien (*).

b) On prend $f(x) = 1$ fonction constante. On a $\|f\|_\infty = 1$ et $\|f'\|_\infty + C\,|f(a)| = C < 1$.

2) a) Par le th des accroissements finis, il existe $y \in]a_1, a_2[$ telle que $\dfrac{f(a_2)-f(a_1)}{a_2-a_1} = f'(y)$.

Or, par 1) appliqué à f', on a $|f'(x) - f'(y)| \le \|f''\|_\infty$, d'où le résultat.

(on peut aussi appliquer l'inégalité des accroissement finis, et utiliser encore $|x-y| \le 1$).

b) Par a), $\|f'\|_\infty \le \|f''\|_\infty + \left|\dfrac{f(a_2)-f(a_1)}{a_2-a_1}\right| \le \|f''\|_\infty + \dfrac{|f(a_1)|}{a_2-a_1} + \dfrac{|f(a_2)|}{a_2-a_1}$.

Or, par 1) a), $\|f\|_\infty \le \|f'\|_\infty + |f(a_1)|$. Donc $\|f\|_\infty \le |f(a_1)| \left(\dfrac{1}{a_2-a_1} + 1\right) + \dfrac{|f(a_2)|}{a_2-a_1}$.

Ainsi, $C_1 = \dfrac{1}{a_2-a_1} + 1$ et $C_2 = \dfrac{1}{a_2-a_1}$ convient.

3) a) Posons $F(x) = \int_0^x \left(\int_0^s f(t)\ dt\right)\ ds$. On a $F'' = g$.

Ainsi, $f'' = g$ ssi $(f-F)'' = 0$, donc ssi il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x) = F(x) + \alpha x + \beta$.

Les conditions $f(0) = f(1) = 0$ correspondent donc à un système inversible de deux équations en les deux inconnues (α, β), d'où on obtient une et une seule solution.

b) Par 2) appliqué à f avec $(a_1, a_2) = (0,1)$, on obtient directement $\|f\|_\infty \le \|g\|_\infty$.

4) a) On pose $\boxed{g = f - P}$. On a ainsi $\boxed{g^{(k)} = f^{(k)} - P^{(k)}}$.

L'application g s'annule en les points a_1, a_2, ... , a_K. Donc g admet au moins K zéros.

Par Rolle appliqué à chaque intervalle $]a_k, a_{k+1}[$, on obtient $(K-1)$ zéros distincts de g'.

Par récurrence immédiate, pour tout $0 \le k < K$, $g^{(k)}$ admet au moins $(K-k)$ zéros.

b) Soit $0 \le k < K$. Alors $K - k \ge 1$, donc $g^{(k)}$ admet au moins un zéro $b_k \in [0,1]$.

Il résulte de 1) a) que $\left\|g^{(k)}\right\|_\infty \le \left\|g^{(k+1)}\right\|_\infty + \left|g^{(k)}(b_k)\right| = \left\|g^{(k+1)}\right\|_\infty$, d'où le résultat.

c) On a donc en particulier $\|f-P\|_\infty \le \left\|f^{(K)} - P^{(K)}\right\|_\infty$.

Or $P^{(K)} = 0$ puisque $\deg P < K$. Donc $\|f-P\|_\infty \le \left\|f^{(K)}\right\|_\infty$.

D'autre part, $P(x) = \sum_{j=1}^K f(a_j) L_j(x)$, donc $\|P\|_\infty \le \sum_{j=1}^K |f(a_j)|\, \|L_j\|_\infty$.

On en conclut $\|f\|_\infty \le \left\|f^{(K)}\right\|_\infty + \|P\|_\infty \le \left\|f^{(K)}\right\|_\infty + \sum_{j=1}^K C_j\ \ |f(a_j)|$, où $C_j = \|L_j\|_\infty$.

5) a) Les hypothèses du théorème au programme sont :

(i) Les fonctions f_n sont des applications de classe C^K sur $[0,1]$.

(ii) $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction F

(iii) Pour tout $0 < k < K$, les séries $\sum f_n^{(k)}$ convergent simplement sur $[0,1]$

(iv) La série $\sum f_n^{(K)}$ des dérivées d'ordre K converge normalement sur $[0,1]$.

Remarque culturelle : On peut remplacer (iii) par une convergence en un seul point, par exemple 0.

b) Par 4), on a $\|f_n\|_\infty \leq \left\|f^{(K)}\right\|_\infty + \sum_{j=1}^{K} C_j \ \ |f(a_j)|$.

Comme les séries $\sum \left\|f^{(K)}\right\|_\infty$ et $\sum |f(a_j)|$ convergent, alors $\sum f_n$ converge normalement sur $[0,1]$.

Soit $0 \leq k < K$.

Plus généralement, en appliquant ce raisonnement à $g_n = f_n^{(k)}$ et vu que $g_n^{(K-k)} = f_n^{(K)}$, on déduit la convergence de la série $\sum \|g_n\|_\infty$ de celles de la série $\sum \left\|f^{(K)}\right\|_\infty$ et des séries $\sum |f(a_j)|$, où $1 \leq j \leq K-k$.

Donc la série des dérivées $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement sur $[0,1]$.

c) Il suffit de prouver que les séries de dérivées $\sum f_n^{(k)}$ convergent normalement sur tout segment $[\alpha, \beta]$.

On peut toujours supposer que les réels $a_1, ..., a_K$ appartiennent à $[\alpha, \beta]$, avec $\alpha < \beta$.

On pose $\forall t \in [0,1]$, $g_n(t) = f_n(\alpha + t(\beta - \alpha))$. On pose aussi $b_j = \dfrac{a_j - \alpha}{\beta - \alpha} \in [0,1]$, et on a $g_n(b_j) = f_n(a_j)$.

On a $g_n^{(k)}(t) = (\beta - \alpha)^k f_n^{(k)}(x)$, où $x = \alpha + t(\beta - \alpha)$.

Lorsque t décrit $[0,1]$, x décrit $[\alpha, \beta]$, donc $\left\|g_n^{(k)}\right\|_\infty = (\beta - \alpha)^k \sup_{[\alpha,\beta]} \left|f_n^{(k)}\right|$.

Les hypothèses de b) sont vérifiées pour $\sum g_n$. En particulier, les séries $\sum g_n(b_j)$ convergent absolument.

Donc pour tout $0 \leq k < K$, les séries $\sum g_n^{(k)}$ convergent normalement sur $[0,1]$.

Comme $\sup_{[\alpha,\beta]} \left|f_n^{(k)}\right| = (\beta - \alpha)^{-k} \left\|g_n^{(k)}\right\|_\infty$, alors $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement sur $[\alpha, \beta]$.

A fortiori, les $\sum f_n^{(k)}$ convergent simplement sur $]0, +\infty[$, donc par a), F est de classe C^K sur $]0, +\infty[$.