Interrogation n°27. *Barème sur 22.5 pts*

$\boxed{\textbf{Inégalités d'interpolation des dérivées} \ (\textit{Centrale MP 2022})}$. *Durée 1h15mn*

Soit $K \in \mathbb{N}$. On note $C^K([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions de classe C^K définies de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

Pour $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

1) Pour $f \in C^1([0,1],\mathbb{R})$, $a \in [0,1]$ et $C \in \mathbb{R}^+$, on considère l'inégalité (*) : $\|f\|_\infty \leq \|f'\|_\infty + C\,|f(a)|$.

a) [2 pts] On prend $a \in [0,1]$ et $\boxed{C=1}$. Montrer que l'inégalité (*) est toujours vraie, c'est-à-dire

$$\forall f \in C^1([0,1],\mathbb{R}), \qquad \|f\|_\infty \leq \left\|f'\right\|_\infty + |f(a)|$$

b) [1 pt] On prend $a \in [0,1]$ et $\boxed{0 \leq C < 1}$. Proposer f pour laquelle l'inégalité (*) n'est pas vérifiée.

2) Soient a_1 et a_2 deux réels de $[0,1]$ vérifiant $0 \leq a_1 < a_2 \leq 1$.

a) [2 pts] Soit $f \in C^2([0,1],\mathbb{R})$. Montrer que $\forall x \in [0,1]$, $\left|f'(x) - \dfrac{f(a_2)-f(a_1)}{a_2-a_1}\right| \leq \|f''\|_\infty$.

b) [3 pts] En déduire qu'il existe des constantes C_1 et C_2 telles que

$$\forall f \in C^2([0,1],\mathbb{R}), \qquad \|f\|_\infty \leq \left\|f''\right\|_\infty + C_1\,|f(a_1)| + C_2\,|f(a_2)|$$

Attention : Les constantes C_1 et C_2 dépendent de a_1 et a_2, mais ne dépendent pas de f.

3) [2 pts] Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue.

a) Montrer qu'il existe une unique fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que

$$f'' = g \quad \text{et} \quad f(0) = f(1) = 0$$

b) Montrer que $\|f\|_\infty \leq \|g\|_\infty$.

4) Soient $K \in \mathbb{N}^*$ et des réels vérifiant $0 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_K \leq 1$. Soit $f \in C^K([0,1],\mathbb{R})$.

On considère le polynôme de Lagrange $L_j(x)$ de degré $< K$ vérifiant $\forall i \in [\![1,K]\!]$, $L_j(\lambda_i) = \delta_{ij}$.

On considère le polynôme d'interpolation de Lagrange $P(x) = \sum_{j=1}^K f(a_j)L_j(x)$.

a) [1.5 pt] Montrer que pour tout $0 \leq k < K$, l'application $f^{(k)} - P^{(k)}$ admet au moins $(K-k)$ zéros sur $[0,1]$.

b) [2 pts] Montrer que pour tout $0 \leq k < K$, on a $\left\|f^{(k)} - P^{(k)}\right\|_\infty \leq \left\|f^{(k+1)} - P^{(k+1)}\right\|_\infty$.

c) [3 pts] En déduire qu'il existe des constantes C_j telles que

$$\forall f \in C^K([0,1],\mathbb{R}), \qquad \|f\|_\infty \leq \left\|f^{(K)}\right\|_\infty + \sum_{j=1}^K C_j\ |f(a_j)|$$

5) *Dérivabilité d'une série de fonctions*

On considère une série de fonctions $\sum f_n$, où les f_n sont des applications définies sur $[0, 1]$.

a) [1 pt] Rappeler les hypothèses du cours garantissant que $\sum f_n$ converge vers une application de classe C^K.

b) [2 pts] On suppose ici que les quatre hypothèses suivantes sont vérifiées :

(i) Les fonctions f_n sont des applications de classe C^K sur $[0, 1]$.

(ii) $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, 1]$

(iii) La série $\sum f_n^{(K)}$ des dérivées d'ordre K converge normalement sur $[0, 1]$

(iv) Il existe $0 \leq a_1 < a_2 < ... < a_K \leq 1$ tel que $\forall j \in [\![1, K]\!]$, la série $\sum f_n(a_j)$ converge absolument.

Montrer que pour tout $0 \leq k < K$, la série $\sum f_n^{(k)}$ des dérivées d'ordre k converge normalement sur $[0, 1]$.

c) [3 pts] Soit une série de fonctions $\sum f_n$, où les f_n sont des applications définies sur $]0, +\infty[$.

On suppose que les quatre hypothèses suivantes sont vérifiées :

(i) Les fonctions f_n sont des applications de classe C^K sur $]0, +\infty[$

(ii) $\sum f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers une application F, c'est-à-dire $\forall x > 0$, $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$

(iii) La série des dérivées $\sum f_n^{(K)}$ d'ordre K converge normalement sur tout segment $[\alpha, \beta] \subset]0, +\infty[$

(iv) Il existe des réels $0 < a_1 < a_2 < ... < a_K$ tels que $\forall j \in [\![1, K]\!]$, $\sum f_n(a_j)$ converge absolument.

Démontrer que l'application F est de classe C^K sur $]0, +\infty[$.

Indication : Pour $[\alpha, \beta] \subset]0, +\infty[$ assez grand, considérer $\forall t \in [0, 1]$, $g_n(t) = f_n(\alpha + t(\beta - \alpha))$.