Interrogation n°26 bis. Corrigé

1.

En considérant une base $\mathcal{B}$ de E, l'application $E^* \to \mathbb{R}^n \quad \varphi \longmapsto (\varphi(e_1), ..., \varphi(e_n))$ est un isomorphisme, donc $\dim E^* = \dim \mathbb{R}^n = n$.

Variante : On identifie φ et sa matrice $L = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},1}\, \varphi$. On obtient un isomorphisme $E^* \to \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.

Remarque : Sans doute (?) pouvait-on utiliser directement le résultat du cours (mais il vaut mieux être prudent) : $\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim E \times \dim F$, avec ici $F = \mathbb{R}$.

2

On a $\omega(x,x) = -\omega(x,x)$, donc $\omega(x,x) = 0$.

3.a

(*unicité*)

Supposons que $\omega(x,y) = X^T M Y$ pour tous vecteurs X et Y.

En particulier, $\omega(e_i, e_j) = E_i^T M E_j = E_i^T M_j = m_{ij}$. Donc nécessairement, $m_{ij} = \omega(e_i, e_j)$.

(*existence*)

Considérons $M = (\omega(e_i, e_j))_{1 \leq i \leq n 1 \leq j \leq n}$. On pose $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_j e_j$.

Alors $\omega(x,y) = \sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^n x_i y_j \omega(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^n y_j m_{ij} \right) = X^T(MY) = X^T M Y.$

3.b)

On a donc $\omega(x,y) = -\omega(y,x)$, donc $X^T M Y = -Y^T M X = -(Y^T M X)^T = X^T(-M^T)Y$.

La relation est vraie pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^n$.

Par unicité de la matrice vue au 3.a), $M = -M^T$.

3.c)

Notons $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ le sev des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Considérons l'application $\varphi : A(E) \to \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \quad \omega \longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, \omega$.

- φ est linéaire, bien définie par 3.a) et 3.b)

- La preuve du 3.a) assure que φ est injective : la matrice M définit entièrement ω.

- Montrons que φ est surjective : soit $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Alors $\omega : (x,y) \longmapsto \sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^n x_i y_j m_{ij}$ est une forme bilinéaire.

De plus, $X^T MY = Y^T M^T X = -Y^T MX$, donc ω est antisymétrique.

On a $m_{ij} = \omega(e_i, e_j)$, donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, \omega = M$ et $M \in \mathrm{Im}\, \varphi$.

- On en déduit que φ est un isomorphisme, d'où $\dim A(E) = \dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \frac{1}{2} n(n-1)$.

(en effet, l'application $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n(n-1)/2} \quad M \longmapsto (m_{ij})_{1 \leq i < j \leq n}$ est un isomorphisme :

autrement dit, toute matrice antisymétrique est notamment de diagonale nulle et est entièrement déterminée par la

famille des coefficients situés strictement au-dessus de la diagonale ;

on pourrait aussi expliciter une base de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, par exemple $(E_{ij} - E_{ji})_{1 \leq i < j \leq n}$).

3.d)

On utilise la (fameuse) relation $X = PX'$ et $Y = PY'$.

On a donc $X^T MY = (PX')^T M(PY') = (X')^T (P^T MP)(Y')$.

Par définition de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\omega)$, on a donc $M' = P^T MP$.

4.

- Supposons que ω une forme symplectique. Alors $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, \omega$ est inversible.

Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ non nul, il existe Y tel que $MY = X$, et on a alors $X^T MY = X^T X > 0$.

- Supposons que ω n'est pas une forme symplectique. Alors $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, \omega$ n'est pas inversible.

Donc M^T n'est pas inversible, et il existe donc X non nul, tel que $M^T X = 0$, c'est-à-dire $X^T M = 0$.

On a donc $\forall Y$, $X^T MY = 0$, c'est-à-dire $\forall y \in E$, $\omega(x, y) = 0$.

5.

Posons $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\omega)$. On a M antisymétrique et inversible.

Comme $M^T = -M$, alors $\det M = (-1)^n \det M$, et comme $\det M \neq 0$, alors $(-1)^n = 1$, et n pair.

Remarque : Autrement dit, lorsque n est impair, toute matrice antisymétrique admet 0 comme valeur propre.

6.

Considérons (e_1, e_2) une base de E.

Il s'agit des applications $\omega(x, y) = X^T \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix} Y$, avec a réel non nul.

Autrement dit, $\omega(x, y) = a(x_2 y_1 - x_1 y_2)$, avec a réel non nul.

Remarque : Noter le lien avec le déterminant (qui est une forme bilinéaire antisymétrique).

Autrement dit, $\omega(x, y) = -a \det_{\mathcal{B}}(x, y)$.

Les formes symplectiques en dimension 2 sont les donc $\lambda \det_{\mathcal{B}}$, avec λ réel non nul.

7.a)

On a $x \in F^\omega$ ssi $\forall y \in F$, $\omega(x,y)=0$, donc ssi $\forall Y \in F$, $X^T MY = 0$, donc ssi $X \in G^\perp$, où $G^\perp$ est le supplémentaire orthogonal de G dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique.

On a donc $x \in F^\omega$ ssi $X \in G^\perp$. L'application $x \longmapsto X$ est un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}^n$.

On en déduit que $\dim F^\omega = \dim(G^\perp) = n - \dim G$.

Comme M est inversible, $\dim G = \dim F$, donc $\dim F^\omega = n - \dim F$, d'où le résultat.

7.b)

Supposons $F \cap F^\omega = \{\overrightarrow{0}\}$. Par a), on a $\dim F + \dim F^\omega = \dim E$, donc $F \oplus F^\omega = E$.

La restriction de ω à $F \times F$ est bilinéaire et antisymétrique (les propriétés de la définition sont vraies sur $E \times E$, donc a fortiori sur $F \times F$). Il en est de même de la restriction de ω à $F^\omega \times F^\omega$.

On considère une base $\mathcal{B}' = (e'_1, ..., e'_p, e'_{p+1}, ..., e'_n)$ adaptée à $F \oplus F^\omega = E$, où $p = \dim F$.

Alors $M' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\,\omega$ est de la forme $\left(\begin{array}{c|c} A & O_{p,n-p} \\ \hline O_{n-p,p} & B \end{array}\right)$, où $p = \dim F$.

En effet, pous tous $i \leq p$ et $j \geq p+1$, on a $\omega(e'_i, e'_j) = 0$.

Comme M' est inversible, alors A et B sont inversibles.

Or, A et B sont respectivement les matrices des restrictions dans les bases $(e'_1, ..., e'_p)$ et $(e'_{p+1}, ..., e'_n)$.

On en déduit que les restrictions sont des formes symplectiques.

Autre preuve (pour prouver que les restrictions sont symplectiques) :

Soit $x \in F$. Il existe $y \in E$ tel que $\omega(x,y) \neq 0$.

On décompose $y = y_0 + y_1 \in F \oplus F^\omega = E$.

Comme $\omega(x, y_1) = 0$, alors $\omega(x,y_0) = \omega(x,y) \neq 0$. Ainsi, on a bien $y_0 \in F$ et $\omega(x,y_0) \neq 0$.

Donc la restriction de ω à $F \times F$ est symplectique.

De même pour F^ω, car $(F^\omega)^\omega = F$ (par inclusion $F \subset (F^\omega)^\omega$ et par dimension).

7.c)

Supposons $F \cap F^\omega \neq \{\overrightarrow{0}\}$. Il existe donc $x \in F$ non nul appartenant à F^ω

Donc on a $x \in F$ non nul et $\forall y \in F$, $\omega(x,y) = 0$.

Alors par 4), la restriction de ω à $F \times F$ n'est pas symplectique.

8

On prouve la propriété par récurrence sur $m = \frac{1}{2}n$.

Lapropriété est immédiate pour $m = 0$. Supposons $n \geq 2$ et la propriété vraie au rang $m - 1$.

Soit $x_1 \in E$ non nul. Il existe $y_1 \in E$ tel que $\omega(x_1, y_1) \neq 0$.

Comme $\omega(x_1, y_1) = 0$, alors nécessairement $y_1 \notin \mathbb{R}x_1$, et donc (x_1, y_1) est libre.

Posons $F = \text{Vect}(x_1, y_1)$.

La restriction de ω à $F \times F$ admet dans la base (x_1, y_1) la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$, avec $a = \omega(x_1, y_1) \neq 0$.

Quitte à considérer $\dfrac{1}{a}y_1$ au lieu de y_1, on peut supposer que $a = 1$.

En particulier, la restriction de ω à $F \times F$ est une forme symplectique sur F.

Par la contraposée de 7.c), $F \cap F^\omega = \{\overrightarrow{0}\}$.

Par 7.b), la restriction $\widetilde{\omega}$ de ω à $F^\omega \times F^\omega$ est une forme symplectique sur F^ω.

Par hypothèse de récurrence, il existe une base $(x_2, y_2, ..., x_m, y_m)$ telles que la matrice de $\widetilde{\omega}$ dans la base $(x_2, y_2, ..., x_m, y_m)$ soit diagonale par blocs de blocs J_1.

Comme $F \oplus F^\omega = E$, $\mathcal{B} = (x_1, y_1, x_2, y_2, ..., x_m, y_m)$ est une base de E.

Et on a bien $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\omega) = \begin{pmatrix} J_1 & O_2 & \dots & O_2 \\ O_2 & J_1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & O_2 \\ O_2 & \dots & O_2 & J_1 \end{pmatrix}$.

10

Par 8, il existe $\mathcal{B} = (x_1, y_1, x_2, y_2, ..., x_m, y_m)$ base de E telle que

$$\omega(x_i, y_i) = 0 \text{ et } \omega(x_i, y_i) = 1 \text{ et pour } i \neq j,\ \omega(x_i, y_j) = \omega(x_i, x_j) = \omega(y_i, y_j) = 0$$

On considère la base $\mathcal{B}' = (x_1, x_2, ..., x_m, y_1, y_2, ..., y_m)$. Alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\omega) = J_{n/2}$, où

$$J_m = \begin{pmatrix} O_m & -I_m \\ I_m & O_m \end{pmatrix}$$

Remarque : Ainsi, M est une matrice antisymétrique inversible ssi il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que

$$M = P^T J_{n/2} P$$

Ne pas confondre avec M semblable à $J_{n/2}$. Ici, on effectue une orthogonalisation des formes bilinéaires qu'il ne faut en aucun cas confondre avec la réduction des endomorphismes.

La seule situation où les notions se recoupent est le cas où la matrice de passage est orthogonale (comme dans le th spectral) : Pour $U \in O_n(\mathbb{R})$, $U^T M U = U^{-1} M U$.