Interrogation n°26 bis. *Durée 2h00. Barème sur 20 pts.*

Bases symplectiques (*extrait légèrement modifié du sujet X MP 2017*)

Dans tout le sujet, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

On note E^* l'espace vectoriel des formes linéaires sur E.

On note $A(E)$ l'espace vectoriel des formes bilinéaires antisymétriques, c'est-à-dire les applications

$$\omega : E \times E \to \mathbb{R}$$

vérifiant $\begin{cases} \omega(\lambda x + y, z) = \lambda\omega(x, y) + \omega(x, z) \\ \omega(x, \lambda y + z) = \lambda\omega(x, y) + \omega(x, z) \end{cases}$ et $\omega(y, x) = -\omega(x, y)$.

Pour $\omega \in A(E)$ et $x \in E$, on note $\omega(x, \cdot)$ la forme linéaire définie par $\omega(x, \cdot) : E \to \mathbb{R} \quad y \longmapsto \omega(x, y)$.

1. [1 pt] Montrer que la dimension de l'espace vectoriel E^* vaut n.

2. [0.5 pt] Soit $\omega \in A(E)$. Montrer que $\omega(x, x) = 0$ pour tout $x \in E$.

3. Soit $\omega \in A(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E.

3.a) [2 pts] Montrer qu'il existe une unique matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont on précisera les coefficients, telles que pour tous x et $y \in E$, on a $\boxed{\omega(x, y) = X^T MY \quad \text{où } X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, x \text{ et } Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, y.}$

On note alors $\boxed{M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\omega)}$.

Attention : Cette question est essentielle pour la suite.

3.b) [0.5 pt] Montrer que M est antisymétrique, c'est-à-dire $M^T = -M$.

3.c) [1 pt] Déterminer la dimension de l'espace vectoriel $A(E)$.

3.d) [1 pt] Soit $\mathcal{B}'$ une base de E. On note $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, \mathcal{B}'$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

On pose $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\omega)$ et $M' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\omega)$. Montrer que $M' = P^T MP$.

Dans la suite du problème, on pourra utiliser $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\omega)$ et $\omega(x, y) = X^T MY$ sans avoir à préciser à nouveau les notations utilisées.

$\boxed{\text{On dit que } \omega \in A(E) \text{ est une forme symplectique ssi } \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\omega) \text{ est inversible}}$.

Remarque : Il résulte de 3.d) que l'inversibilité de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\omega)$ ne dépend pas du choix de $\mathcal{B}$.

4. [2.5 pts] Soit $\omega \in A(E)$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) ω une forme symplectique

(ii) Pour tout vecteur $x \in E$ non nul, il existe un vecteur $y \in E$ tel que $\omega(x, y) \neq 0$.

5. [1 pt] Soit ω une forme symplectique. Montrer que E est de dimension paire.

6. [1 pt] Déterminer toutes les formes symplectiques lorsque E est de dimension 2.

Désormais, $n = 2m$ est un entier pair ≥ 2.

7. Soit F un sous-espace vectoriel E.

Pour $\omega \in A(E)$, on appelle restriction de ω à $F \times F$ l'application

$$\widetilde{\omega} : F \times F \to \mathbb{R} \quad (x, y) \longmapsto \omega(x, y)$$

L'application $\widetilde{\omega}$ est bilinéaire et antisymétrique. Autrement dit, on a $\widetilde{\omega} \in A(F)$.

On note F^ω le sous-espace vectoriel de E défini par

$$F^\omega = \{x \in E \mid \forall y \in F, \quad \omega(x, y) = 0\}$$

7.a) [2.5 pts] Soient F un sous-espace vectoriel E et $\omega : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme symplectique.

Montrer que $\dim F + \dim F^\omega = n$.

Indication : On pourra considérer $G = \{MY,\, y \in F\}$.

7.b) [2 pts] On suppose $F \cap F^\omega = \{\overrightarrow{0}\}$.

Montrer que $F \oplus F^\omega = E$. Montrer que la restriction de ω à $F \times F$ est une forme symplectique sur F et que la restriction de ω à $F^\omega \times F^\omega$ est une forme symplectique sur F^ω.

7.c) [1 pt] On suppose $F \cap F^\omega \neq \{\overrightarrow{0}\}$. Montrer que la restriction de ω à $F \times F$ n'est pas symplectique.

8. [3 pts] Soit ω une forme symplectique sur E.

Montrer par récurrence qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que

$$\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(\omega) = \begin{pmatrix} J_1 & O_2 & \dots & O_2 \\ O_2 & J_1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & O_2 \\ O_2 & \dots & O_2 & J_1 \end{pmatrix}, \text{ où } J_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

9. [1 pt] Soit ω une forme symplectique.

Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\omega) = \begin{pmatrix} O_{n/2} & -I_{n/2} \\ I_{n/2} & O_{n/2} \end{pmatrix}$.