Interrogation n°26. Corrigé

1.

On a $J_n^2 = -I_{2n}$ et $J_n^Y = -J_n$. Comme $J_n^2 = -I_{2n}$, alors J_n est inversible et $(J_n)^{-1} = -J_n$.

2.a)

$$K_\alpha^T J_n K_\alpha = \begin{pmatrix} I_n & -\alpha I_n \\ O_n & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha I_n & -I_n \\ I_n & O_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha I_n - \alpha I_n & -I_n \\ I_n & O_n \end{pmatrix} = J_n.$$

2.b)

On a $(M^T)^{-1} = (M^{-1})^T$. En effet, on a $(M^T)(M^{-1})^T = (MM^{-1})^T = (I_n)^T = I_n$.

Donc $L_U^T J_n J_U = \begin{pmatrix} M^T & O_n \\ O_n & M^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O_n & -(M^T)^{-1} \\ M & O_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O_n & -I_n \\ I_n & O_n \end{pmatrix} = J_n$.

3.

On a $M^T J_n M = J_n$, donc $(\det M)^2(\det J_n) = (\det J_n)$.

Comme J_n est inversible, $\det J_n \neq 0$, donc $(\det M)^2 = 1$, c'est-à-dire $\det M \in \{-1, 1\}$.

4.a)

Soient M et $N \in Sp_n(\mathbb{R})$. Alors $(MN)^T J_n (MN) = N^T (M^T J_n M) N = N^T J_n N = J_n$.

4.b)

On déduit de 3 que $\det M \neq 0$. Donc M est inversible.

Comme $M^T J_n M = J_n$, alors $J_n = (M^T)^{-1} J_n M^{-1}$.

Comme $(M^T)^{-1} = (M^{-1})^T$, alors $(M^{-1})^T J_n (M^{-1}) = J_n$, c'est-à-dire $M^{-1} \in Sp_n(\mathbb{R})$.

4.c)

Comme $(M^{-1})^T J_n (M^{-1}) = (\ M J_n^{-1} M^T)^{-1}$, alors par b), $M J_n^{-1} M^T = J_n^{-1}$.

Comme $J_n^{-1} = -J_n$, on en déduit $M J_n M^T = J_n$.

5.

On a $\begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c} O_m & -I_m \\ \hline I_m & O_m \end{array}\right) \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} C^T A - A^T C & C^T B - A^T D \\ \hline D^T A - B^T C & D^T B - B^T D \end{array}\right)$.

D'où la CNS : $\boxed{C^T A = A^T C,\ D^T B = B^T D,\ A^T D - C^T B = I_n}$ car $(A^T D - C^T B)^T = D^T A - B^T C$.

6.a)

On a $\begin{pmatrix} I_n & Q \\ O_n & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & O_n \\ V & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U + QV & QW \\ V & W \end{pmatrix}$.

Donc on peut prendre $W = D$, $V = C$, $Q = BD^{-1}$ et $U = A - BD^{-1}C$.

Remarque : Il s'agit de la **méthode du pivot de Gauss par blocs** (en prenant D comme pivot).

6.b)

On a $D^T B = B^T D$, donc $BD^{-1} = \left(D^T\right)^{-1} B^T = \left(D^{-1}\right)^T B^T = \left(BD^{-1}\right)^T$, donc BD^{-1} est symétrique.

On a $\det(M) = \det \begin{pmatrix} I_n & Q \\ O_n & I_n \end{pmatrix} \times \det \begin{pmatrix} U & O_n \\ V & W \end{pmatrix} = (\det U)(\det W) = \det(A - BD^{-1}C)\det(D)$.

Or, $\det(A - BD^{-1}C) = \det(A^T - C^T(BD^{-1})^T) = \det(A^T - C^T BD^{-1})$.

Donc on obtient $\det(M) = \det(A^T - C^T B D^{-1}) \det(D) = \det(A^T D - C^T B)$.

Or, par 5, on a $A^T D - C^T B = I_n$, donc $\det(M) = \det(I_n) = 1$.

7.

On a $(QZ_1 \mid QZ_2) = s_1(PZ_1 \mid QZ_2) = s_1(Z_1 \mid P^T QZ_2)$.

Comme $P^T Q$ est symétrique, alors $(Z_1 \mid P^T QZ_2) = (Z_2 \mid P^T QZ_1) = (Z_2 \mid P^T QZ_1)$.

On a donc finalement $(QZ_1 \mid QZ_2) = s_1(PZ_1 \mid QZ_2) = s_2(PZ_1 \mid QZ_2)$.

Comme s_1 et s_2 sont distincts, alors $(PZ_1 \mid QZ_2) = 0$, donc $(QZ_1 \mid QZ_2) = 0$.

8.a)

Par 5), on a $A^T D - C^T B = I_n$. D'où a fortiori, $\operatorname{Ker} B \cap \operatorname{Ker} D = \{0\}$.

8.b) Supposons par l'absurde $DZ_i = 0$. Comme $s_i \neq 0$, alors $BZ_i = 0$.

Donc $Z_i \in \operatorname{Ker} B \cap \operatorname{Ker} D$, d'où par a), $Z_i = 0$, ce qui contredit l'hypothèse.

Montrons que $(DZ_1, ..., DZ_m)$ est libre.

Par 5, on sait que $D^T B = B^T D$, c'est-à-dire $B^T D$ symétrique. On peut donc appliquer 7.

On a donc $(DZ_i \mid DZ_j) = 0$ pour tous $i \neq j$, car $s_i \neq s_j$.

Ainsi, $(DZ_1, ..., DZ_m)$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls, donc a fortiori libre.

8.c)

L'existence de Z non nul tel que $(D - sB)Z = 0$ équivaut à $(D - sB)$ non inversible.

Par b), il existe au plus n valeurs distinctes non nulles s telles que $(D - sB)$ n'est pas inversible.

Mais $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ est infini. Donc il existe α (non nul) tel que $D - \alpha B$ est inversible.

9.

Soit $M \in Sp_n(\mathbb{R})$. On utilise les notations précédentes.

- Le cas D inversible résulte de 6.b)

- Supposons D non inversible. Par 8.c), il existe α tel que $D - \alpha B$ est inversible.

Considérons la matrice $N = K_\alpha M = \begin{pmatrix} I_n & O_n \\ -\alpha I_n & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C - \alpha A & D - \alpha B \end{pmatrix}$.

Par 2.a) et 3), la matrice N appartient à $Sp_n(\mathbb{R})$.

Comme $D - \alpha B$ est inversible, alors $\det N = 1$.

Comme $\det N = (\det K_\alpha)(\det M)$ et $\det K_\alpha = 1$, alors on obtient bien $\det M = 1$.