Interrogation n°26. *Barème sur 20.5 pts. Durée 2h00*

Groupe symplectique (*extrait de Mines PSI 2015*)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \begin{pmatrix} O_n & -I_n \\ I_n & O_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

Préambule

1. [1 pt] Calculer J_n^2 et J_n^T en fonction de I_{2n} et de J_n. Montrer que J_n est inversible et expliciter J_n^{-1}.

On note $Sp_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ d'ordre $2n$ vérifiant $\boxed{M^T J_n M = J_n}$.

2.a) [0.5 pt] Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la matrice $K_\alpha = \begin{pmatrix} I_n & O_n \\ -\alpha I_n & I_n \end{pmatrix} \in Sp_n(\mathbb{R})$.

2.b) [1 pt] Montrer que pour toute matrice $M \in GL_n(\mathbb{R})$, la matrice $L_U = \begin{pmatrix} M & O_n \\ O_n & (M^T)^{-1} \end{pmatrix} \in Sp_n(\mathbb{R})$.

3. [0.5 pt] Si $M \in Sp_n(\mathbb{R})$, préciser les valeurs possibles de $\det(M)$.

4.a) [1 pt] Montrer que le produit de deux éléments de $Sp_n(\mathbb{R})$ est un élément de $Sp_n(\mathbb{R})$.

4.b) [1 pt] Montrer que si $M \in Sp_n(\mathbb{R})$, alors M est inversible et $M^{-1} \in Sp_n(\mathbb{R})$.

4.c) [0.5 pt] Montrer que si $M \in Sp_n(\mathbb{R})$, alors $M^T \in Sp_n(\mathbb{R})$.

5. [2 pts] Soit $M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ écrite sous la forme $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, avec $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Déterminer des relations sur A, B, C, D donnant une CNS pour que $M \in Sp_n(\mathbb{R})$.

6. On suppose dans cette question que D est inversible.

6.a) [2 pts] Montrer qu'il existe quatre matrices Q, U, V, W de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & Q \\ O_n & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & O_n \\ V & W \end{pmatrix}$$

6.b) [2.5 pts] Montrer que si $M \in Sp_n(\mathbb{R})$, alors BD^{-1} est symétrique et que $\det(M) = \det(A^T D - C^T B) = 1$.

7. [2 pts] Soient P et $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $P^T Q$ est symétrique.
On suppose qu'il existe deux réels distincts s_1 et s_2 et deux vecteurs Z_1 et Z_2 dans $\mathbb{R}^n$ tels que

$$(Q - s_1 P) Z_1 = 0 \text{ et } (Q - s_2 P) Z_2 = 0$$

Montrer que le produit scalaire canonique $(QZ_1 \mid QZ_2)$ est nul.

8. On suppose dans cette question que $M \in Sp_n(\mathbb{R})$ et que D n'est pas inversible.

8.a) [1 pt] Montrer que $\operatorname{Ker} B \cap \operatorname{Ker} D = \{0\}$.

8.b) [2 pts] Soient des vecteurs Z_1, ..., Z_m non nuls et des réels non nuls et distincts $s_1, ..., s_m$ tels que

$$(D - s_i B) Z_i = 0 \text{ pour tout } i \in \{1, 2, ..., m\}$$

Montrer que pour tout $i \in \{1, 2, ..., m\}$, $DZ_i \neq 0$ et que la famille $(DZ_1, ..., DZ_m)$ est libre.

8.c) [1.5 pt] Montrer qu'il existe un réel α tel que $D - \alpha B$ est inversible.

9. [2 pts] Montrer que toute matrice $M \in Sp_n(\mathbb{R})$ est nécessairement de déterminant égal à 1.