

## Interrogation n°25. Corrigé

**A.1)** a) Considérons la fonction  $f : t \mapsto (\ln t)^n t^{x-1} e^{-t}$ .

$f$  est intégrable sur  $]0, 1]$  car en  $t = 0$ ,  $f(t) \sim (\ln t)^n t^{x-1} = O(t^{\varepsilon-1})$ , avec  $\varepsilon = \frac{1}{2}x > 0$ .

$f$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$  car  $f(t) = O_{+\infty}(\frac{1}{t^2})$ .

b) Posons  $g(x, t) = t^{x-1} e^{-t}$ .

- Pour tout  $t$ , l'application  $x \mapsto g(x, t)$  de classe  $C^\infty$  et  $\frac{\partial^n g}{\partial x^n}(x, t) = (\ln t)^n t^{x-1} e^{-t}$ .

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout  $x > 0$ , l'application  $t \mapsto \frac{\partial^n g}{\partial x^n}(x, t)$  est par a) intégrable sur  $]0, +\infty[$ .

- De plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour tout segment  $[a, b] \subset ]0, +\infty[$ ,

$$\forall t > 0, \left| \frac{\partial^n g}{\partial x^n}(x, t) \right| \leq \varphi_n(t), \text{ où } \varphi_n(t) = \begin{cases} |\ln t|^n t^{a-1} e^{-t} & \text{si } t \in ]0, 1] \\ (\ln t)^n t^{b-1} e^{-t} & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

Par a),  $\varphi_n$  est intégrable sur  $]0, 1]$  et sur  $[1, +\infty[$ , donc sur  $]0, +\infty[$ .

On en déduit par le th sur les intégrales paramétrées que  $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} g(x, t) dt$  est de classe  $C^\infty$ .

**A.2)** Avec le changement de variable  $u = \alpha t$ ,  $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha^n} \int_0^{+\infty} u^{x-1} e^{-u} du = \frac{\Gamma(x)}{\alpha^n}$ .

**B.1)** Il suffit de donner des équivalents en 0 et en 1 permettant de comparer avec les intégrales de Riemann.

On a en effet  $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \sim_0 t^{x-1}$  et  $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \sim_1 (1-t)^{y-1}$ .

**B.2)** On utilise le changement de variable  $t = 1 - u$ . On a  $dt = -du$ .

Donc  $\beta(x, y) = \int_1^0 (1-u)^{x-1} u^{y-1} (-du) = \int_0^1 u^{y-1} (1-u)^{x-1} du = \beta(y, x)$ .

**B.3)** Par une IPP sur  $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$  et en faisant tendre  $\varepsilon$  vers  $0^+$ , on obtient :  $\beta(x+1, y) = \frac{x}{y+1} \beta(x, y+1)$ .

Une IPP permet ainsi de relier  $\beta(x+1, y)$  et  $\beta(x, y+1)$ , relation où la valeur de la somme des deux arguments est conservée. Des IPP ne peuvent pas suffire. Il faut donc trouver un argument supplémentaire.

L'idée est de noter que  $t + (1-t) = 1$ , ce qui permet d'obtenir  $\beta(x, y) = \beta(x+1, y) + \beta(x, y+1)$ .

Donc  $\beta(x+1, y) = \frac{x}{y+1}(\beta(x, y) - \beta(x+1, y))$ , donc  $\beta(x+1, y) = \frac{x}{x+y+1} \beta(x, y)$ .

**B.4)** Il suffit d'appliquer deux fois la relation du 3) combinée avec 2) :

$$\beta(x, y) = \beta(x+1, y+1) = \frac{x}{x+y+1} \beta(x, y+1) = \frac{x}{x+y+1} \frac{y}{x+y} \beta(x, y).$$

**C.1)** Il faut bien préciser l'argument qui utilise les relations fonctionnelles sur  $\beta$  et sur  $\Gamma$ .

**C.2)** Noter au passage que  $t = \frac{u}{1+u} = 1 - \frac{1}{1+u}$ , donc  $dt = \frac{1}{(1+u)^2} du$  directement.

**C.3)** La fonction intégrée étant positive, la primitive  $F_{x,y}$  est croissante sur  $[0, +\infty[$ .

Donc  $F_{x,y}(t) \leq \lim_{+\infty} F_{x,y} = \Gamma(x+y)$ .

**C.4)** Il faut utiliser le théorème de continuité des intégrales paramétrées.

On pose  $g(u, a) = \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} F_{x,y}((1+u)a)$ , fonction continue en  $a$ , et on a la domination :

$$\forall a \in [0, +\infty[, \forall u \in ]0, +\infty[, |g(u, a)| \leq \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} \Gamma(x+y) = \varphi(u) \text{ indépendant de } a.$$

Et  $\varphi$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$  directement par la relation obtenue au C.2).

D'où l'existence et la continuité de  $G$ .

**C.5)** On applique le théorème de convergence dominée (avec la même fonction de domination  $\varphi$  qu'à la question précédente). En toute rigueur, on doit considérer une suite arbitraire  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tendant vers  $+\infty$ , et déduire du th de convergence dominée que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} G(a_n) = \Gamma(x+y) \int_0^{+\infty} \varphi(u) du = \Gamma(x+y)\beta(x, y)$$

**C.6)** Il faut utiliser le théorème de dérivation des intégrales paramétrées.

Avec les notations de 4), on a  $a \mapsto g(u, a)$  de classe  $C^1$ , et  $\frac{\partial g}{\partial a}(u, a) = u^{x-1} a^{x+y-1} e^{-(1+u)a}$ .

On doit se placer sur un segment  $[\alpha, \beta] \subset ]0, +\infty[$ .

On a  $\forall a \in [\alpha, \beta], \forall u \in ]0, +\infty[, 0 \leq \left| \frac{\partial g}{\partial a}(u, a) \right| \leq u^{x-1} \beta^{x+y-1} e^{-(1+u)\alpha} = \psi(u)$  en notant que  $x+y \geq 1$ .

Et  $\psi$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$  car  $\alpha > 0$ .

**C.7)** Par C.6),  $G'(a) = a^y e^{-a} \int_0^{+\infty} (ua)^{x-1} e^{-ua} du$ .

Donc  $G'(a) = e^{-a} a^{y-1} \Gamma(x)$  par A.2) (ou le changement de variable  $v = ua$ ).

**C.8)** On a  $G(0) = 0$ , donc  $\Gamma(x+y)\beta(x, y) = G(+\infty) = \int_0^{+\infty} G'(a) da = \int_0^{+\infty} e^{-a} a^{y-1} \Gamma(x) da = \Gamma(x)\Gamma(y)$ .