Interrogation n°24. Corrigé

Exercice A. Nombres de Catalan

1) La décomposition $e = (e_1)e_2$ étant unique, construire un mot bien parenthésé e de longueur $(2n+2)$ revient à choisir le couple (e_1, e_2) qui sont des mots bien parenthésés dont la somme des longueurs vaut $2n$.

Les longueurs de e_1 et e_2 sont donc de la forme $2k$ et $2(n-k)$, où $0 \leq k \leq n$.

D'où $c_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}$.

2) Il y a 2^{2n} mots de longueur $2n$ dont les caractères sont des parenthèses ouvrantes ou fermantes

Donc $c_n = O\left(4^n\right)$, donc le rayon de convergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n x^n$ vérifie $R \geq \dfrac{1}{4} > 0$.

3) Pour $x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$, on a $F(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{n+1} x^{n+1} = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} x \left(\sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}\right) x^n$.

Par produit de Cauchy, on a : $\forall x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[,\ F(x)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}\right) x^n$.

Donc $\forall x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[,\ F(x) = 1 + xF(x)^2$.

Remarque : Le produit de Cauchy de deux séries entières s'applique à l'intérieur du disque de convergence (valide car il y a convergence absolue des séries).

4) On a $\forall x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[,\ \ (2xF(x)-1)^2 = 4x(xF(x)^2 - F(x)) + 1 = -4x + 1 \neq 0$.

5) Ainsi, $x \longmapsto (2xF(x)-1)$ est continue et ne s'annule pas, donc est de signe constant sur $]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$.

Or, sa valeur en 0 est -1, donc $\forall x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[,\ \ 2xF(x) - 1 < 0$.

Or, $(2xF(x)-1) = \pm\sqrt{1-4x}$. Donc $2xF(x) - 1 = -\sqrt{1-4x}$, d'où $F(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ pour $x \neq 0$.

6) Par le cours, on sait que $u \longmapsto \sqrt{1-u}$ est DSE de rayon $R = 1$, donc

$$\forall u \in]-1,1[, \quad \sqrt{1-u} = (1-u)^{1/2} = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2} \dots \left(n - \frac{3}{2}\right) \frac{u^n}{n!}$$

Donc

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[\setminus \{0\}, \quad \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2}\frac{3}{2} \dots \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{4^{n+1}x^n}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2}\frac{3}{2} \dots \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{4^n x^n}{(n+1)!}$$

Or, $\dfrac{1}{2}\dfrac{3}{2} \dots \left(n - \dfrac{1}{2}\right) \dfrac{4^n}{(n+1)!} = \dfrac{2^n}{n+1} \dfrac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{n!} = \dfrac{1}{n+1}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2} = \dfrac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

On obtient donc $\forall x \in \left]-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right[$, $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n+1}\binom{2n}{n}\, x^n$, y compris en $x = 0$ car $F(0) = 1$.

Par unicité du DSE, on a donc $c_n = \dfrac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

(en effet, deux séries entières qui coïncident au voisinage de 0 ont les mêmes coefficients).

b) On a donc $\dfrac{c_{n+1}}{4c_n} = \dfrac{1+1/2n}{1+2/n} = \left(1 - \dfrac{3}{2n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$.

On pose $a_n = \dfrac{n^{3/2}c_n}{4^n}$.

On a alors $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1 - \dfrac{3}{2n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)\left(1 + \dfrac{3}{2n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) = 1 + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Donc la série $\sum \ln(a_{n+1}) - \ln(a_n)$ converge. Alors $(\ln(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel μ.

Donc $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lambda$, où $\lambda = e^\mu > 0$. On en déduit $c_n \sim \dfrac{\lambda 4^n}{n^{3/2}}$.

c) On a $n! \sim \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}$. Donc $c_n \sim n\dfrac{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}e^{-2n}}{(2\pi n)n^{2n}e^{-2n}} = n\dfrac{4^n}{\sqrt{\pi n}} = \dfrac{4^n}{\sqrt{\pi}n^{3/2}}$.

Exercice B. Exponentielle de matrice

Exercice B. Puissances et exponentielle matricielles

1) a) Toute application linéaire en dimension finie est lipschitzienne. D'où l'existence de K.

b) Posons $Y = AX$. On a $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$.

Donc $|y_i| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}x_j| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \|X\|_\infty$, et ainsi $\|AX\|_\infty \leq L\|X\|_\infty$, avec $\boxed{K = \max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^n |a_{ij}|}$.

Montrons que ce majorant est atteint, et ainsi, que K est la plus petite constante possible.

Il existe $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $\sum_{j=1}^n |a_{ij}| = K$.

On considère alors un vecteur X de sorte que :

- d'une part que les $a_{ij}x_j$ soient tous des réels positifs (de sorte que $|y_i| = \sum_{j=1}^n |a_{ij}x_j|$)

- d'autre part que les x_j aient tous le même module (de sorte que $\sum_{j=1}^n |a_{ij}x_j| = \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \|X\|_\infty$)

On prend par exemple $x_j = \dfrac{\overline{a_{ij}}}{|a_{ij}|}$ si $a_{ij} \neq 0$ et $x_j = 1$ sinon.

On a ainsi $|y_i| = K$ et $\|X\|_\infty = 1$, donc $\|AX\|_\infty = K\|X\|_\infty$.

Remarque culturelle : $K = N(A) = \sup_{X\neq 0}\dfrac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty}$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

appelée norme subordonnée à la norme $\| \ \|_\infty$ de $\mathbb{C}^n$.

2) a) *Première méthode* (conseillée) :

On considère la division euclidienne de x^k par $\chi_A(x)$: on a $x^k = Q_k(x)\chi_A(x) + R_k(x)$, avec $\deg R_k(x) < n$.

On a alors $A^k = Q_k(A)\chi_A(A) + R_k(A) = R_k(A)$, car $\chi_A(A) = O_n$ (th de Cayley-Hamilton).

Seconde méthode :

Comme $\chi_A(A) = A^n + ... = O_n$, on a directement $A^n \in \boxed{F = \mathrm{Vect}(I_n, A, A^2, ..., A^{n-1})}$.

Montrons par récurrence sur k que $A^k \in F$.

Alors $A^{k+1} = AA^k \in \mathrm{Vect}(A, A^2, ..., A^{n-1}, A^n) \subset .F$, car $A^n \in F$.

b) On a $x^k = Q_k(x)\chi_A(x) + R_k(x)$, donc $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $(\lambda_j)^k = R_k(\lambda_j)$, car $\chi_A(\lambda_j) = 0$.

Donc R_k est l'unique polynôme de degré $< n$ tel que $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $R_k(\lambda_j) = (\lambda_j)^k$.

Ainsi, $R_k(x) = \sum_{j=1}^n (\lambda_j)^k L_j(x)$, et donc $R_k(A) = \sum_{j=1}^n (\lambda_j)^k L_j(A)$.

Variante matricielle : Il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = P\,\mathrm{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)P^{-1}$.

On a alors $A^k = P\,\mathrm{Diag}((\lambda_1)^k, ..., (\lambda_n)^k)P^{-1}$.

De façon plus générale, pour tout polynôme Q, on a $Q(A) = P\,\mathrm{Diag}(Q(\lambda_1), ..., Q(\lambda_1))P^{-1}$.

Donc R_k est l'unique polynôme de degré $< n$ tel que $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $R_k(\lambda_j) = (\lambda_j)^k$.

3) a) On a $\forall k \in \mathbb{N}$, $\left\|A^k Z\right\|_\infty \leq K^k \left\|Z\right\|_\infty$,, donc $\left\|\frac{t^k}{k!}A^k Z\right\|_\infty \leq \frac{|t|^k}{k!}K^k \left\|Z\right\|_\infty$.

Donc chaque coefficient $x_i(t)$ de $X(t)$ est défini par **une série de fonctions normalement convergente** (par rapport à t) sur tout segment $[-\rho, \rho]$ de $\mathbb{R}$:

En effet, $x_i(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}(A^k Z)_i$, et on a $\sup_{[-\rho,\rho]} \left|\frac{t^k}{k!}(A^k Z)_i\right| \leq \left\|Z\right\|_\infty \frac{(\rho K)^k}{k!}$.

Et il est de même de la série des dérivées $\sum x_i'(t) = \sum \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}(A^k Z)_i$.

Par le théorème de dérivation des séries de fonctions, chaque fonction $t \longmapsto x_i(t)$ est de classe C^1 :

on en déduit que X est C^1 et que $\forall t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}A^k Z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}(A^{k+1}Z)_i$.

D'autre part, $\sum_{k=0}^N \frac{t^k}{k!}A^{k+1}Z = A\left(\sum_{k=0}^N \frac{t^k}{k!}A^k Z\right)$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ par linéarité de $Y \longmapsto AY$.

Et par continuité de $Y \longmapsto AY$, on obtient bien par passage à la limite $X'(t) = A$.

Remarque culturelle : L'application vectorielle X est en fait l'unique fonction de classe C^1 vérifiant le système différentiel $X'(t) = AX(t)$ avec la condition initiale $X(0) = Z$.

b) Soit $t \in \mathbb{R}$.

Par 2) a), on a $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k Z \in F = \mathrm{Vect}(Z, AZ, .., A^{p-1}Z)$, donc $\forall N \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^N \frac{t^k A^k Z}{k!} \in F$.

Or, F est fermé (comme tout sev en dim finie), c'est-à-dire F est stable par passage à la limite.

Remarque : F est fermé car F peut être défini par un système d'équations linéaires.

On en conclut que $X(t) \in F$.