Interrogation n°24. *Les exercices sont indépendants*

$\boxed{\textbf{Exercice A. Nombres de Catalan}\ \ (\textit{inspiré de Centrale MP 2021})}$. *Durée 50mn*

Dans cette partie, on s'intéresse à des chaines de caractères constituées uniquement des deux caractères *parenthèse ouvrante* et *parenthèse fermante*. On dit qu'un mot est bien parenthésé s'il commence par une parenthèse ouvrante et qu'à toute parenthèse ouvrante est associée une (unique) parenthèse fermante qui lui est postérieure.

Par exemple le mot ( ) (( )) est bien parenthésé.

En revanche, le mot ( )) ( ) n'est pas bien parenthésé.

Un mot bien parenthésé est ainsi forcément constitué d'un nombre pair de caractères. Formellement, une expression bien parenthésée est soit vide soit de la forme $(e_1)e_2$, où e_1 et e_2 sont des expressions bien parenthèses.

On note c_n le nombre d'expressions bien parenthésées à $2n$ caractères (dont n parenthèses ouvrantes).

1) On $c_0 = 1$ (expression vide). Justifier brièvement que $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}$.

2) Montrer que $c_n \leq 4^n$. Que peut-on en déduire du rayon R de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n x^n$?

3) On considère $\forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$, $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$. Montrer que

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[\ , \qquad F(x) = 1 + xF(x)^2$$

4) Montrer que la fonction $x \longmapsto (2xF(x) - 1)^2$ ne s'annule pas sur $\left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$.

5) En déduire que $\forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[\setminus \{0\}$, $F(x) = \dfrac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$.

6) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{c_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}}$.

7) *Question supplémentaire*

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $c_{n+1} = 2\dfrac{2n+1}{n+2}c_n$.

b) En déduire $\dfrac{c_{n+1}}{4c_n} = 1 - \dfrac{3}{2n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $c_n \sim \lambda\, \dfrac{4^n}{n^{3/2}}$.

Indication : Étudier $\ln a_{n+1} - \ln a_n$, où $a_n = n^{3/2}4^{-n}c_n$.

c) Retrouver le résultat du b) à l'aide de la formule de Stirling.

Exercice B. Puissances et exponentielle matricielles (*durée 40 mn*)

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $Z \in \mathbb{C}^n$. On munit $\mathbb{C}^n$ de la norme $\| \ \|_\infty$.

1) a) Montrer qu'il existe $K \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall X \in \mathbb{C}^n$, $\|AX\|_\infty \leq K \|X\|_\infty$.

b) Déterminer la plus petite constante K possible.

2) On note $\chi_A(x)$ le polynôme caractéristique de A, qui est un polynôme unitaire et de degré n.

a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un polynôme $R_k(x)$ de degré $\leq n-1$ tel que $A^k = R_k(A)$.

Indication : Considérer la division euclidienne de $P(x) = x^k$ par $\chi_A(x)$.

On peut aussi raisonner par récurrence sur k en utilisant le fait que $A^n \in \text{Vect}(I_n, A, A^2, ..., A^{n-1})$.

Remarque : Ainsi, $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ A^k \in \text{Vect}(I_n, A, A^2, ..., A^{n-1})}$.

b) On suppose que χ_A est scindé à racines simples $\lambda_1, ..., \lambda_n$. En particulier, A est diaognalisable.

Expliciter $R_k(x)$ en fonction des polynômes de Lagrange L_j associés aux λ_j.

3) On considère $\boxed{X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n \quad t \longmapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{t^k}{k!} A^k Z}$. On a en particulier $X(0) = Z$.

a) Montrer avec soin que X est de classe C^1 et que $\forall t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = AX(t)$.

b) En utilisant 2) a), montrer que $\forall t \in \mathbb{R}$, $X(t) \in \text{Vect}(Z, AZ, .., A^{n-1}Z)$.