Interrogation n°23. Corrigé

1. On calcule le polynôme caractéristique $\chi(x) = \begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 0 & x-1 & -1 \\ -1 & -1 & x+1 \end{vmatrix}$.

En développant selon la première colonne, $\chi(x) = x \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ -1 & x+1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ x-1 & -1 \end{vmatrix}$.

Donc $\chi(x) = x^3 - x - 1$.

On étudie alors la fonction polynôme $x \longmapsto \chi(x) = x^3 - x - 1$.

On a $\chi'(x) = 3x^2 - 1$, donc χ' s'annule en $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

On a $\chi(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} - 1 = -\frac{2}{\sqrt{3}} - 1 < 0$ et $\chi(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1 < 0$.

Par le th de la bijection appliqué sur les intervalles $]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}]$, $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ et $[\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty[$, on en déduit que χ admet un unique zéro λ sur $\mathbb{R}$, et que $\lambda > \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Mais on a aussi $\chi(1) = -1 < 0 < 3 = \chi(2)$, donc par le TVI, $\lambda \in \,]1, 2[$.

2.

Les racines complexes de χ sont donc λ, σ et $\overline{\sigma}$. On a $\chi(x) = (x - \lambda)(x - \sigma)(x - \overline{\sigma})$.

Par les relations entre coefficients et racines d'un polynôme scindé, on a $\lambda\sigma\overline{\sigma} = 1$, c'est-à-dire $\lambda\,|\sigma|^2 = 1$.

Comme $\lambda \in \,]1, 2[$, on en déduit $\frac{1}{\sqrt{2}} < |\sigma| < 1$.

3.a)

On vérifie que $M^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

En considérant les première colonnes de (I_3, M, M^2), on obtient une base de $\mathbb{R}^3$.

A fortiori, I_3, M et M^2 sont linéairement indépendants dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

3.b)

Par le th de Cayley-Hamilton, on a $\chi_M(M) = O_3$, c'est-à-dire $\boxed{M^3 = M + I_3}$.

3.c

En multipliant par M^n, on a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^{n+3} = M^{n+1} + M^n$.

4.a)

Par linéarité de la trace, on a $u_{n+3} = u_{n+1} + u_n$.

On a $u_0 = 3$, $u_1 = 0$ et $u_2 = 2$.

Donc $(u_0, u_1, ..., u_{10}) = (3, 0, 2, 3, 2, 5, 5, 7, 10, 12, 17)$, d'où $v_n = (-1, 1, 1, -1, 1, -1, -1, 1, 1, -1)$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \mathrm{tr}(M^n)$ et $v_n = \cos(\pi u_n)$.

4.b)

Comme $(v_7, v_8, v_9) = (v_0, v_1, v_2)$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+7} = v_n$ par récurrence immédiate d'ordre 3.

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique de période 7.

4.c)

On a $v_{7k} + ... + v_{7k+6} = v_0 + v_1 + ... + v_6 = -1$.

Donc $\omega_{7q} = q\sum_{n=0}^{k} v_k = -q$, et a fortiori, $(\omega_k)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée.

5.a)

Par trigonalisation dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, on a $M = P\begin{pmatrix} \lambda & * & * \\ 0 & \sigma & * \\ 0 & 0 & \overline{\sigma} \end{pmatrix}P^{-1}$, où $P \in GL_3(\mathbb{C})$.

Donc $M^n = P\begin{pmatrix} \lambda^n & * & * \\ 0 & \sigma^n & * \\ 0 & 0 & \overline{\sigma}^n \end{pmatrix}P^{-1}$, donc $u_n = \lambda^n + \sigma^n + \overline{\sigma}^n = \lambda^n + 2\,\mathrm{Re}(\sigma^n)$.

5.b

On sait que $|\sigma| < 1$, donc $\sum \sigma^n$ converge.

Or, par l'IAF, $|\cos(\pi\lambda^n) - \cos(\pi u_n)| \leq |\pi\lambda^n - \pi u_n| \leq 2\pi\,|\mathrm{Re}(\sigma^n)|$.

Donc $\sum(\cos(\pi\lambda^n) - \cos(\pi u_n))$ converge absolument.

Donc $y_k = \omega_k + O_{+\infty}(1)$ lorsque $k \to +\infty$.

Or, $(\omega_k)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée. A fortiori, la suite $(y_k)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée.

6.a)

On a $x^n - \varphi(x^n) \in \mathbb{Z}$, donc $\cos(2\pi x^n) = \cos(2\pi\varphi(x^n))$

On a $\forall x \in [\alpha, \beta]$, $\lim_{n\to+\infty} \varphi(x^n) = 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} \cos(2\pi x^n) = 1$.

Et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [a, b]$, $|\cos(2\pi x^n)| \leq 1 = \psi(x)$, avec ψ intégrable sur $[\alpha, \beta]$.

Par convergence dominée, $\lim_{n\to+\infty} J_n = \int_\alpha^\beta 1\ dx = \beta - \alpha$.

6.b)

Avec $u = x^n$, c'est-à-dire $x = u^{1/n}$, on a $\boxed{J_n = \frac{1}{n}\int_{\alpha^n}^{\beta^n} u^{1/n-1}\cos(2\pi u)\ du}$.

Remarque importante : On va appliquer la même méthode que pour l'intégrale de Dirichlet.

Par une IPP, $\frac{1}{n}\int_{\alpha^n}^{\beta^n} u^{1/n-1}\cos(2\pi u)\ du = \frac{1}{2\pi n}\left[u^{1/n-1}\sin(2\pi u)\right]_{\alpha^n}^{\beta^n}\ du + \frac{1}{2\pi n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\int_{\alpha^n}^{\beta^n} u^{1/n-2}\sin(2\pi u)\ du$.
On a $[\alpha^n, \beta^n] \subset [1, +\infty[$.
On a $\forall u \geq 1$, $\left|u^{1/n-1}\sin(2\pi u)\right| \leq 1$. Donc $\left|\frac{1}{2\pi n}\left[u^{1/n-1}\sin(2\pi u)\right]_{\alpha^n}^{\beta^n}\right| \leq \frac{1}{\pi n}$.
Pour $n \geq 2$, $\left|\int_{\alpha^n}^{\beta^n} u^{1/n-2}\sin(2\pi u)\ du\right| \leq \int_{\alpha^n}^{\beta^n}\left|u^{1/n-2}\sin(2\pi u)\right|\ du \leq \int_1^{+\infty} u^{1/n-2}\ du \leq \int_1^{+\infty} u^{-3/2}\ du$.
Et pour $n \geq 1$, $0 \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq 1$. On en conclut que $J_n = O_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$. Donc $\lim_{n\to+\infty} J_n = 0$.

6.c)

On en déduit que l'hypothèse faite au 6.a) est fausse pour tout intervalle $[\alpha, \beta]$, avec $1 \leq \alpha < \beta$.

Donc dans tout intervalle $[\alpha, \beta]$, il existe $x \in [\alpha, \beta]$ tel que $(\varphi(x^n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.

Or, pour toute suite $y_n \in [0, \pi]$, $\lim_{n\to+\infty} \cos(y_n) = 1$ ssi $\lim_{n\to+\infty} y_n = 0$.

En effet, comme $y_n \in [0, \pi]$, alors $y_n = \arccos(\cos(y_n))$.

Et les $2\pi\varphi(x^n)$ appartiennent à $[0, \pi]$. Et $\cos(2\pi\varphi(x^n)) = \cos(2\pi x^n)$.

Donc $(\varphi(x^n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 ssi $(\cos(2\pi x^n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 1.

Autrement dit, Δ est dense dans $[1, +\infty[$, car il rencontre tout intervalle $[\alpha, \beta] \subset [1, +\infty[$, avec $\alpha < \beta$.