Interrogation n°22. Corrigé

Problème

1) On a $P(S_{n+p} = 0 \mid S_p = 0) = P(\sum_{k=p+1}^{n+p} X_k = 0 \mid \sum_{k=1}^{p} X_k = 0)$.

Comme les X_k sont indépendantes, $P(\sum_{k=p+1}^{n+p} X_k = 0 \mid \sum_{k=1}^{p} X_k = 0) = P(\sum_{k=p+1}^{n+p} X_k = 0)$.

Comme les X_k sont i.i.d. , $P(\sum_{k=p+1}^{n+p} X_k = 0) = P(\sum_{k=1}^{n} X_k = 0) = a_n$.

2) $(N = +\infty) = \cap_{n\in\mathbb{N}^*}(S_n \neq 0)$ événement comme intersection dénombrable d'événements.

3) S'il y a retour en 0, il y a nécessairement premier retour en un $k \in [\![1, n]\!]$.

Donc $(S_n = 0)$ est inclus dans la réunion disjointe des B_k, avec $1 \leq k \leq n$.

Donc par additivité, $P(S_n = 0) = \sum_{k=1}^{n} P(S_n = 0, B_k) = \sum_{k=1}^{n} P(S_n = 0 \mid B_k)P(B_k)$.

(en convenant que si $P(B_k) = 0$, on prend $P(S_n = 0 \mid B_k)P(B_k) = 0$).

4) On a $P(S_n = 0 \mid B_k) = P(S_n = 0 \mid S_k = 0 \text{ et } S_j \neq 0 \text{ pour } 1 \leq j < k)$.

Or, $P(S_n = 0 \mid S_k = 0) = P(\sum_{j=k+1}^{n} X_j = 0 \mid S_k = 0)$.

Donc $P(S_n = 0 \mid B_k) = P(\sum_{j=k+1}^{n} X_j = 0 \mid B_k)$.

Comme B_k est une fonction de $X_1, ..., X_k$ et que les X_j sont indépendantes, on obtient :

$P(S_n = 0 \mid B_k) = P(\sum_{j=k+1}^{n} X_j =) = a_{n-k}$ par le même argument qu'au 1).

5) Comme les B_n sont disjoints, alors $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n < +\infty$. Par convergence normale, g est continue sur $[0, 1]$.

Comme a_n et b_n sont majorées par 1, le rayon des séries entières est ≥ 1. Donc f et g sont C^∞ sur $[0, 1[$.

6) On utilise un produit de Cauchy de $f(t)$ et $g(t)$, pour $t < 1$ (convergence absolues).

On pose $b_0 = 0$. On obtient $f(t)g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}(\sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k})t^n = \sum_{n=1}^{+\infty}(\sum_{k=1}^{n} b_k a_{n-k})t^n$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} b_k a_{n-k} = a_n$ par 5), on obtient $f(t)g(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n t^n = f(t) - 1$.

7) On a $P(N < +\infty) = P(\sqcup_{n\in\mathbb{N}^*} B_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = g(1)$.

Comme g est continue en 1, on a $\lim_{t\to1,t<1} g(t) = g(1)$. D'autre part, $\forall t \in [0, 1[$, $g(t) = 1 - \dfrac{1}{f(t)}$.

On en déduit que $P(N < +\infty) = 1$ ssi $\lim_{t\to1,t<1} \dfrac{1}{f(t)} = 0$, c'est-à-dire $\lim_{t\to1,t<1} f(t) = +\infty$.

8) On a $\forall t \in [0, 1[$, $g(t) = 1 - \dfrac{1}{f(t)}$ donc $g'(t) = \dfrac{f'(t)}{f(t)^2}$. Ainsi, $\lim_{t\to1,t<1} g'(t) = \lambda$.

Par le th du prolongement C^1, g est C^1 sur $[0, 1]$, et $g'(1) = \lambda$.

Mais comme $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = 1$ et $b_n = P(N = n)$, alors $g(t) = G_N(t)$ série génératrice de N.

Par le cours (propriété admise), N est d'espérance finie et $E(N) = g'(1)$, donc $E(N) = \lambda$.

9) On suppose qu'il y a presque sûrement retour en 0.

Considérons l'événément A_k : il y a au moins k retours en 0.

Supposons A_k. Notons m l'indice du k-ième retour. On a $S_m = 0$.

En raisonnant avec la suite tronquée $(S_n)_{n\geq m}$, on a presque sûrement un $(k + 1)$-ième retour.

Donc $P(A_{k+1} \mid A_k) = 1$. Par la formule de l'intersection, $P(A_k) = 1$.

Par continuité croissante, $P(\cap_{k\in\mathbb{N}}A_k) = 1$, et ainsi il y a presque sûrement une infinité de retours en 0.

10) La fonction f est croissante, donc il existe $\lim_{t\to 1, t<1} f(t) \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.

Soit $N \in \mathbb{N}$. On a $\forall t \in [0,1[$, $\sum_{n=0}^{N} a_n t^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = f(t) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

En faisant tendre t vers 1, on a $\sum_{n=0}^{N} a_n \leq \lim_{t\to 1, t<1} f(t) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. Par encadrement $\lim_{t\to 1, t<1} f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Exercice A

1) Posons $P(X) = \sum_{j=1}^{p} L_j(X)$. On a $L_j(\lambda_i) = \delta_{ij}$, donc $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $P(\lambda_i) = \sum_{i=1}^{p} \delta_{ij} = 1$.

Le polynôme $P(X) - 1$ admet au moins p racines et est de degré $< p$, donc est nul. Donc $\sum_{j=1}^{p} L_j(X) = 1$.

2) On sait que les sev propres E_{λ_j} sont en somme directe.

Il s'agit donc de prouver que $E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + ... + E_{\lambda_p} = E$. Or, par 1), $\sum_{j=1}^{p} L_j(u)(x) = x$.

Pour conclure, on va montrer que le vecteur $x_j = L_j(u)(x)$ appartient à E_{λ_j}.

On a $(u - \lambda_j)(x_j) = Q(u)(x)$, où $Q(X) = (X - \lambda_j)L_j(X)$.

Comme $Q(X)$ est de la forme $\alpha M(X)$, alors $Q(u)(x) = 0$. D'où $(u - \lambda_j)(x_j)$, c'est-à-dire $x_j \in E_{\lambda_j}$.

Remarque : On démontre ainsi que si u admet un polynôme annulateur M scindé à racines simples, alors u est diagonalisable et ses valeurs propres sont des racines de M.

Exercice B

1) Sur $\mathbb{C}$, u admet au moins une valeur propre λ. Si $E_\lambda = E$, alors $u = \lambda\,\mathrm{Id}$, donc tout sec est stable.

Sinon, les trois sev $\{\overrightarrow{0}\}$, E_λ et E sont des sev stables distincts.

2) a) u admet une base $\mathcal{B}$ de vecteurs propres.

Soit F un sev stable. On considère L une base de F. Ainsi, L est une famille libre de E.

On peut compléter L en une base de E, en ajoutant des vecteurs propres $(e_1, ..., e_p)$.

Le sev $G = \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_p)$ est stable par u et on a aussi $F \oplus G = E$.

b) Supposons connus p vecteurs propres $(e_1, ..., e_p)$ de u linéairement indépendants.

Le sev $F = \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_p)$ est stable par u, donc admet un supplémentaire S stable par u.

Si $p < n$, on a S est un $\mathbb{C}$-ev de dimension ≥ 1, donc $u_{|S}$ admet au moins un vecteur propre e_{p+1}.

Ainsi, par récurrence, on construit une base $(e_1, ..., e_n)$ de vecteurs propres. D'où le résultat.

Remarque : La propriété est en fait vraie dans tout ev de dimension finie (par exemple sur $\mathbb{R}$).

En effet, à chaque étape, on considère un hyperplan H contenant $(e_1, ..., e_p)$, et u admet donc un supplémentaire stable par u, qui est donc une droite Ke_{p+1}, et ainsi, e_{p+1} vecteur propre linéairement indépendants des précédents.

Exercice C

1) Soit $z \in F$. On a $x_0 + tz \in F$, donc $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad t \longmapsto f(x_0 + tz) = g(x_0 + tz)$ admet en $t = 0$ un minimum.

Donc $\varphi'(0) = 0$. Mais $\varphi'(t) = \langle \mathrm{grad}\, f(x_0 + tz), z\rangle$. Donc $\langle \mathrm{grad}\, f(x_0), z\rangle = \varphi'(0) = 0$.

Comme z est arbitraire dans F, alors $\mathrm{grad}\, f(x_0)$ est orthogonal à F.

2) Par le cours, on a :

$f(x) = f(x_0) + \langle \operatorname{grad} f(x_0), x - x_0 \rangle + \dfrac{1}{2}(x - x_0)^T A(x - x_0) + \mathfrak{o}\left(\|x - x_0\|^2\right)$ lorsque $x \to x_0$ dans $\mathbb{R}^n$.

Lorsque $x \in F$, on a aussi $x - x_0 \in F$, on déduit de a) :

$g(x) = f(x) = g(x_0) + \dfrac{1}{2}(x - x_0)^T A(x - x_0) + \mathfrak{o}\left(\|x - x_0\|^2\right)$ lorsque $x \to x_0$ dans F.

3) Posons $G = \operatorname{Vect}(f_1, ..., f_q)$. On a $\dim F + \dim G = q + p > n$, donc $F \cap G \neq \{\overrightarrow{0}\}$.

Ainsi, il existe un vecteur non nul $y \in F \cap G$.

Posons $y = \sum_{j=1}^{q} \alpha_j f_j$. On a alors $y^T A y = \sum_{j=1}^{q} \alpha_j^2 \lambda_j < 0$, car les α_j ne sont pas tous nuls.

4) Par le théorème spectral, il existe une BON de vecteurs propres et admet n valeurs propres (comptées avec multiplicité). Supposons par l'absurde que A n'admet pas p valeurs propres positives ou nulles.

Alors A admet $q > n - p$ valeurs propres strictement négatives.

Par 3), il existe $y \in F$ tel que $y^T A y < 0$. Alors les $x = x_0 + ty$ appartiennent à G, et par 2), on a

$g(x_0 + ty) = g(x_0) + \dfrac{1}{2}(y^T A y)t^2 + \mathfrak{o}\left(t^2\right)$ lorsque t tend vers 0.

Ainsi, $g(x_0 + ty) - g(x_0) \sim \dfrac{1}{2}(y^T A y)t^2$, donc $g(x_0 + ty) < g(x_0)$ pour $t \neq 0$ assez petit. D'où une contradiction.