Interrogation n°22. *Barème sur 26 pts. Durée 1h40*

Toutes les propriétés du programme peuvent être utilisées sans justification (sauf à l'exo A.2)).

Problème. Premiers retours dans une marche aléatoire

Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles.

On suppose que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une marche aléatoire, c'est-à-dire qu'il existe une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires réelles **mutuellement indépendantes et de même loi** telles que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \qquad \text{et en particulier, on a} \quad S_0 = 0$$

On définit $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{a_n = P(S_n = 0 \mid S_0 = 0) = P(S_n = 0) = P(\sum_{k=1}^{n} X_k = 0)}$. On a $a_0 = 1$.

1) [1 pt] Soit des entiers n et p. Montrer que $P(S_{n+p} = 0 \mid S_p = 0) = a_n$.

2) [0.5 pt] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit l'événement B_n : $S_n = 0$ et $S_1 \neq 0$, $S_2 \neq 0$, ... , $S_{n-1} \neq 0$).

On pose $b_n = P(B_n)$. Ainsi, $\boxed{b_n \text{ est la probabilité du premier retour en 0 à l'étape } n}$.

Et on définit $N = \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n = 0\} \\ +\infty \text{ sinon} \end{cases}$ Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = (N = n)$.

Montrer que $(N = +\infty)$ est un événement.

3) [1.5 pt] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $P(S_n = 0) = \sum_{k=1}^{n} P(S_n = 0 \mid B_k)P(B_k)$.

4) [1.5 pt] Montrer que $P(S_n = 0 \mid B_k) = a_{n-k}$.

5) [1.5 pt] On définit $\forall t \in [0, 1[$, $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, t^n$ et $\forall t \in [0, 1]$, $g(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n\, t^n$.

Montrer que g est continue sur $[0, 1]$, et que f et g sont de classe C^∞ sur $[0, 1[$.

6) [1.5 pt] Montrer que

$$\forall t \in [0, 1[\ , \qquad f(t) = 1 + f(t)g(t)$$

7) [1.5 pt] Montrer que N est presque sûrement fini ssi $\lim_{t\to 1, t<1} f(t) = +\infty$.

Autrement dit, il y a presque sûrement un premier retour en 0 ssi $\lim_{t\to 1, t<1} f(t) = +\infty$.

8) [1.5 pt] On suppose $\lim_{t\to 1, t<1} f(t) = +\infty$ et $\lim_{t\to 1, t<1} \dfrac{f'(t)}{f(t)^2} = \lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que g est dérivable en 1.

En déduire (avec une propriété admise du cours) que N est d'espérance finie, et que $E(N) = \lambda$.

9) (★) [1.5 pt] On suppose qu'il y a presque sûrement retour en 0.

Montrer qu'il y a presque sûrement une infinité de retours en 0.

10) *Question supplémentaire hors-interrogation.* Montrer que $\lim_{t\to 1, t<1} f(t) = +\infty$ ssi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty$.

Exercice A [4 pts]

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des nombres complexes distincts. On considère les polynômes $L_j(X) = \prod_{1\leq i\leq p,\ i\neq j} \left(\dfrac{X-\lambda_i}{\lambda_j-\lambda_i}\right)$.

1) Montrer que $\sum_{j=1}^{p} L_j(X) = 1$.

2) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie.

On suppose que $M(X) = (X-\lambda_1)...(X-\lambda_p)$ est un polynôme annulateur de u, c'est-à-dire

$$M(u) = (u-\lambda_1 \,\mathrm{Id}) \circ (u-\lambda_2 \,\mathrm{Id}) \circ \ldots \circ (u-\lambda_p \,\mathrm{Id}) = 0$$

On note $E_{\lambda_j} = \mathrm{Ker}(u-\lambda_j \,\mathrm{Id})$ le sev propre de u associé à la valeur propre λ_j.

En utilisant les vecteurs $L_j(u)(x)$, montrer que u est diagonalisable et que $\mathrm{Sp}(u) \subset \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p\}$.

Exercice B (*extrait Centrale PC*) [4.5 pts]

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension n.

On note « sev » pour signifier « sous-espace vectoriel ».

1) On suppose $n \geq 2$. Montrer que u admet au moins 3 sous-espaces stables distincts.

2) a) Montrer que si u est diagonalisable, tout sev F de E admet un supplémentaire stable par E.

On rappelle le théorème de la base incomplète :

On peut compléter toute famille libre en une base par ajouts de vecteurs pris dans une base donnée.

b) Réciproquement, on suppose que tout sev de E admet un supplémentaire stable par u.

Montrer que u est diagonalisable.

Indication : Construire pour $1 \leq p \leq n$ une famille de p vecteurs propres de u linéairement indépendants.

Exercice C [5.5 pts]

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad x \longmapsto f(x)$ une fonction de classe C^2. On munit $E = \mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique $\langle\ ,\ \rangle$.

On identifie $x \in \mathbb{R}^n$ à la matrice colonne $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. En particulier, $\langle x, y\rangle = x^T y$.

Soit F un sev de $\mathbb{R}^n$. de dimension p.

On note g la restriction de f à F, c'est-à-dire $g : F \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in F,\ g(x) = f(x)$.

On suppose que g atteint son minimum en $x_0 \in F$, c'est-à-dire $\boxed{g(x_0) = \inf\{g(x),\ x \in F\}}$.

1) Montrer que $\boxed{\mathrm{grad}\, f(x_0) \in F^{\perp}}$, c'est-à-dire que $\mathrm{grad}\, f(x_0)$ est orthogonal à tout vecteur de F.

Indication : Pour $z \in F$, dériver la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad t \longmapsto f(x_0 + tz)$.

2) On note $\boxed{A = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\right)_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n} \text{ la matrice Hessienne de } f \text{ en } x_0}$. Ainsi, on a $A \in S_n(\mathbb{R})$.

Justifier (avec le cours) que $g(x) = g(x_0) + \dfrac{1}{2}(x-x_0)^T A(x-x_0) + \mathfrak{o}\left(\|x-x_0\|^2\right)$ lorsque $x \to x_0$ $\boxed{\text{dans } F}$.

3) Soient $1 \leq q \leq n$ et $(f_1, ..., f_q)$ une famille orthonormée composée de vecteurs propres de A.

On a ainsi, $\forall j \in [\![1, q]\!],\ Af_j = \lambda_j f_j$. On suppose que $\forall j \in [\![1, q]\!],\ \lambda_j < 0$.

Montrer que si $q > n-p$, alors il existe $y \in F$ tel que $y^T Ay < 0$.

4) Déduire des questions précédentes que A admet au moins p valeurs propres positives ou nulles (comptées avec multiplicité comme racines du polynôme caractéristique de A).