Interrogation n°21 bis. Corrigé

A.0) On a $\int \dfrac{x}{1+x^2}\ dx = \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+\alpha$ et $\dfrac{1}{2}\int \ln(1+x^2)\ dx = \dfrac{1}{2}x\ln(1+x^2) - \int \dfrac{x^2}{1+x^2}\ dx + \beta$.

Comme $\dfrac{x^2}{1+x^2} = 1 - \dfrac{1}{1+x^2}$, on obtient $\dfrac{1}{2}\int \ln(1+x^2)\ dx = x\ln(1+x^2) - x + \arctan x + \beta$.

Donc les solutions sont les $g(x) = x\ln(1+x^2) + x - \arctan x + (\alpha x + \beta)$, avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

A.1) a) On pose $\forall x \in [0,+\infty[\times]0,+\infty[$, $g(x,t) = \dfrac{1-\cos t}{t^2}\ e^{-xt}$.

- Pour tout $t>0$, l'application $x \longmapsto g(x,t)$ est continue.

- On a $1-\cos t \sim \frac{1}{2}t^2$ en $t=0$ et $1-\cos t = O_{+\infty}(1)$. Donc $g(x,t) \sim_{t=0} \frac{1}{2}$ et $g(x,t) = O_{t=+\infty}(e^{-xt})$.

Pour tout $x\geq 0$, $t\longmapsto g(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

- Propriété de domination : $\forall x\in[0,+\infty[$, $|g(x,t)| \leq \varphi(t) = \frac{1-\cos t}{t^2}$ qui est intégrable sur $]0,+\infty[$.

On en déduit que f est continue sur $[0,+\infty[$.

b) - Pour tout $t>0$, $x\longmapsto g(x,t)$ est C^2, et $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -\dfrac{1-\cos t}{t}\ e^{-xt}$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t) = (1-\cos t)\ e^{-xt}$.

- Pour tout $x>0$, $t\longmapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ et $t\longmapsto \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)$ sont intégrables sur $]0,+\infty[$.

En effet, elles sont prolongeables par continuité en 0, et sont en $O_{+\infty}(e^{-xt})$.

- Propriété de domination :

Pour $a>0$, on a $\boxed{\forall x\in[a,+\infty[}$, $\left|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right| \leq \varphi_2(t) = 2e^{-at}$ qui est intégrable sur $]0,+\infty[$

On en déduit que f est de classe C^2 sur $[0,+\infty[$, et que $\forall x>0$, $f''(x) = \int_0^{+\infty}(1-\cos t)e^{-xt}$.

Or, $\int_0^{+\infty}(1-e^{it})e^{-xt}\ dt = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-i}$, donc $f''(x) = \mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x-i}\right) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{1+x^2}$.

c) On pourrait utiliser la convergence dominée pour un paramètre continu. Mais une majoration directe simple convient ici et on conclut par pincement :

$|f(x)| \leq \int_0^{+\infty}\dfrac{1}{2}e^{-xt}\ dt = \dfrac{1}{2x}$. De même $|f'(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt}\ dt \leq \dfrac{1}{x}$.

A.2) a) On sait par 1) que f est continue en 0. Par la formule admise, on obtient $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

b) La fonction $\phi : s\longmapsto \int_0^{+\infty}\dfrac{1-\cos(st)}{t^2}\ dt$ est paire, car cos est paire. On a bien $\phi(0)=0$.

Il en de même de la fonction $s\longmapsto |s|$. Il suffit donc de considérer le cas $\boxed{s>0}$.

On effectue le changement de variable $u = st$. On a : $\phi(s) = s\dfrac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \dfrac{1-\cos(u)}{u^2}\, du = s$. D'où le résultat.

A.3) On considère $\operatorname{Im} S \subset \{s_n, n \in \mathbb{N}\}$. On pose $a_n = P(S = s_n)$.

On a $E(|S|) = \sum_{n=0}^{+\infty} |s_n|\, a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^{+\infty} \dfrac{1-\cos(s_n t)}{t^2}\, dt$

On considère la série de fonctions $F :]0, +\infty[\to \mathbb{R} \quad t \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} F_n(t)$, où $F_n(t) = \dfrac{1-\cos(s_n t)}{t^2}$.

La série de fonctions converge normalement sur tout segment de $]0, +\infty[$, donc Fest continue.

De plus, on a bien $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |F_n(t)|\ dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} F_n(t)\ dt = \sum_{n=0}^{+\infty} |s_n|\, a_n < +\infty$.

On peut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions.

Donc $E(|S|) = \int_0^{+\infty} F(t)\ dt$, et donc $= \int_0^{+\infty} \dfrac{1-E(\cos(St))}{t^2}\, dt$ par le théorème du transfert.

A.4) a) On a $\cos(T+X) = \cos T \cos X - \sin T \sin X$. Comme T et X sont indépendantes, on obtient :

$E(\cos(T+X)) = E(\cos T)E(\cos X) - E(\sin T)E(\sin X)$.

Comme X et $-X$ ont même loi, il en est de même de $\sin X$ et de $\sin(-X) = -\sin(X)$.

Donc a fortiori, $E(\sin X) = E(-\sin X)$,c'est-à-dire $E(\sin X) = 0$. D'où le résultat.

b) Par a) appliqué aux variables tS_{k-1} et à tX_k, on a $E(\cos(tS_k)) = E(\cos(tS_{k-1}))E(\cos(tX_k))$.

Mais $E(\cos(tX_k)) = \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\cos(-t) = \cos t$.

Par récurrence, on obtient $E(\cos(S_n t)) = (\cos t)^n$. D'où par 3) : $E(|S_n|) = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \dfrac{1-(\cos t)^n}{t^2}\, dt$.

A.5) a) Posons $g(t) = 1-(1-t)^n$. On a $g'(t) = n(1-t)^{n-1} \leq n$ pour tout $t \in [0,1]$.

On a $g(0) = 0$ et $\sup_{[0,1]} g' \leq n$. Par l'inégalité des accroissements finis, on a donc $\forall u \in [0,1]$, $g(t) \leq nt$.

b) Par Taylor-Lagrange, $u = 1 - \cos\left(\dfrac{x}{\sqrt{n}}\right) \leq \dfrac{x^2}{2n}$. Lorsque $x \in [0,1]$, $u = 1-\cos\left(\dfrac{x}{\sqrt{n}}\right) \in [0,1]$.

On conclut : Pour $x \in [0,1]$, $1 - \cos\left(\dfrac{x}{\sqrt{n}}\right)^n = g\left(1-\cos\left(\dfrac{x}{\sqrt{n}}\right)\right) \leq n\dfrac{x^2}{2n} = \dfrac{x^2}{2}$.

A.6) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{u_n}{\sqrt{n}} = \int_0^{+\infty} F_n(x)\, dx$, où $F_n(x) = \dfrac{1-\cos\left(\dfrac{x}{\sqrt{n}}\right)^n}{x^2}$.

- On a $\left(\cos\left(\dfrac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = \left(1 - \dfrac{x^2}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^n \to e^{-x^2/2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Donc $\forall x > 0$, $\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = \dfrac{1-e^{-x^2/2}}{x^2}$.

- Propriété de domination : $F_n(x) \leq \varphi(x) = \begin{cases} 1/2 \text{ si } x \in]0,1] \\ 2/x^2 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$ et φ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Par convergence dominée, $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} F_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty}\dfrac{1-e^{-x^2/2}}{x^2}\,dx = L$.

A.7) Par IPP, on a : pour tous $0<a<A$, $\int_a^A \dfrac{1-e^{-x^2/2}}{x^2} = \left[\dfrac{1-e^{-x^2/2}}{x}\right]_a^A + \int_a^A e^{-x^2/2}dx$.

Avec $a\to 0^+$ et $A\to+\infty$, on obtient $L=\int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$. D'où $u_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi n}{2}}$ et $E(|S_n|) = \dfrac{2}{\pi}u_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi n}{2}}$.

A.8) On a $X_k = 2Y_n - 1$, où Y_n suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$.

Donc $S_n = 2R_n - n$, où R_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n,\dfrac{1}{2}\right)$. Donc $\forall k\in[\![0,n]\!]$, $P(S_n = 2k-n = \dfrac{1}{2^n}\binom{n}{k})$.

On en conclut $E(|S_n|) = \dfrac{1}{2^n}\sum_{k=0}^n |n-2k|\binom{n}{k}$, donc $\omega_n = \sum_{k=0}^n |n-2k|\binom{n}{k} \sim 2^n\sqrt{\dfrac{2n}{\pi}}$.

B.1) $S+X$ est d'espérance finie, car $|S+X|\le |S|+1$.

On a $E(|S+X|) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|\,P(S+X=k)$.

Or, $P(S+X=k) = \frac{1}{2}P(S+X=k\mid X=1) + \frac{1}{2}P(S+X=k\mid X=-1)$,

c'est-à-dire $P(S+T=k) = \frac{1}{2}P(S=k-1)+\frac{1}{2}P(S=k+1)$.

Donc $E(|S+X|) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|k|\,P(S=k-1) + \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|k|\,P(S=k+1)$.

d'où $E(|S+X|) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|k+1|\,P(S=k) + \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|k-1|\,P(S=k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{2}(|k+1|+|k-1|)P(S=k)$.

Or, $\dfrac{1}{2}(|k+1|+|k-1|) = \begin{cases} |k| \text{ si } k\in\mathbb{Z}^* \\ 1 \text{ si } k=0\end{cases}$

Donc $E(|S+X|) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^*}|k|\,P(S=k) + P(S=0) = E(|S|)+P(S=0)$.

B.2) Par 1) et par récurrence, $E(|S_n|) = E(|S_0|) + \sum_{k=0}^n P(S_k=0) = \sum_{k=0}^n P(S_k=0)$ car $S_0=0$.

Or, $P(S_n=0) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{n/2} = a_{n/2}$ si n est pair, et $P(S_n=0)=0$ si n est impair.

Donc $E(|S_n|) = \sum_{k=1}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor} a_k = A_{\lfloor (n-1)/2\rfloor}$.

B.3) Posons $f(x) = (1-x)^{-1/2}$. On a $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = \dfrac{1}{n!}\dfrac{1}{2}\cdots\dfrac{n-1/2}{2} = \dfrac{(2n)!}{(2^n\,n!)^2} = \dfrac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$.

B.4) $\sum A_n x^n$ est le produit de Cauchy de $\sum a_n x^n$ et de $\sum x^n$, qui ont 1 comme rayon de convergence.

Donc pour $|x|<1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\dfrac{1}{(1-x)} = \dfrac{1}{(1-x)^{3/2}}$.

Or, $\dfrac{1}{(1-x)^{3/2}} = 2\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\right)$, donc $A_n = 2(n+1)\,a_{n+1}$.

B.5) Par 2), on a $E(|S_n|) = A_{\lfloor (n-1)/2\rfloor}$, donc $E(|S_n|) = 2\left(\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor+1\right)a_{\lfloor (n+1)/2\rfloor} \sim n a_{\lfloor (n+1)/2\rfloor}$.

Or, $a_{\lfloor (n+1)/2\rfloor} \sim \sqrt{\dfrac{2}{\pi n}}$, donc on retrouve bien $E(|S_n|) \sim n\sqrt{\dfrac{2}{\pi n}} = \sqrt{\dfrac{2n}{\pi}}$.