**Interrogation n°21 bis**. *Barème sur 26 pts*

$\boxed{\textbf{Distance à l'origine dans les marches aléatoires}}$ (*inspiré de Centrale MP 2015*)

*Les parties A et B sont indépendantes.*

**Partie A**

**A.0)** [1.5 pt] Déterminer les fonctions $g : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ qui vérifient $\forall x \geq 0,\ g''(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

**A.1)** On pose $\boxed{f(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{1-\cos t}{t^2}\ e^{-xt}\ dt}$.

a) [1.5 pt] Montrer que $f$ est définie et continue sur l'intervalle fermé $[0, +\infty[$.

b) [2.5 pts] Montrer que $f$ est de classe $C^2$ sur $]0, +\infty[$, et que $\forall x > 0,\ f''(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{1+x^2}$.

c) [1 pt] Montrer que $f$ converge vers 0 en $+\infty$.

On montre de même (*admis ici*) que $\lim_{+\infty} f' = 0$. Et on en déduit (*admis ici*) que

$$\forall x > 0, f(x) = x \ln x - \frac{1}{2} x \ln(x^2+1) - \arctan x + \frac{\pi}{2}$$

**A.2)** a) [1 pt] Déduire de 1) que $\int_0^{+\infty} \dfrac{1-\cos t}{t^2}\ dt = \dfrac{\pi}{2}$.

b) [1 pt] Montrer que $\forall s \in \mathbb{R},\ \ |s| = \dfrac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \dfrac{1-\cos(st)}{t^2}\ dt$.

**A.3)** [2.5 pts] Soit $S$ une v.a. réelle d'espérance finie. Montrer *avec soin* que

$$E(|S|) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - E(\cos(St))}{t^2}\ dt$$

*Remarque* : Comme $\operatorname{Im} S$ est une partie de $\mathbb{R}$ au plus dénombrable, on peut supposer que $\operatorname{Im} S \subset \{s_n, n \in \mathbb{N}\}$.

**A.4)** a) [1.5 pt] Soient $T$ et $X$ deux v.a. réelles indépendantes. On suppose que $X$ et $-X$ ont même loi.

Montrer que $E(\cos(T+X)) = E(\cos T) E(\cos X)$.

b) [1.5 pt] On considère $n \in \mathbb{N}$ et $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ où les $X_k$ sont des variables i.i.d. de Rademacher.

Montrer que

$$E(|S_n|) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - (\cos t)^n}{t^2}\ dt$$

On pose $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1-(\cos t)^n}{t^2}\, dt.$

**A.5)** a) [1 pt] Montrer l'inégalité : $\forall t \in [0,1], \quad 1-\ (1-t)^n \leq nt.$

b) [1.5 pt] En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0,1], \quad 1-\cos\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n \leq \frac{x^2}{2}.$

**A.6)** [2 pts] Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\sqrt{n}} = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-x^2/2}}{x^2}\, dx$$

**A.7)** [1 pt] On donne $\int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Montrer à l'aide des questions précédentes que

$$E(|S_n|) \sim \sqrt{\frac{2n}{\pi}}$$

**A.8)** [1 pt] En déduire un équivalent lorsque $n$ tend vers $+\infty$ de $\omega_n = \sum_{k=0}^n |n-2k| \binom{n}{k}$.

**Partie B**

**B.1)** [3 pts] Soit $\boxed{S : \Omega \to \mathbb{Z}}$ et $X : \Omega \to \{-1,1\}$ deux variables aléatoires indépendantes.

On suppose que $S$ est d'espérance finie et que $X$ suit la loi de Rademacher. Montrer que

$$E(|S+X|) = E(|S|) + P(S=0)$$

**B.2)** [1 pt] On considère $n \in \mathbb{N}$ et $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ où les $X_k$ sont des variables i.i.d. de Rademacher.

Exprimer $E(|S_n|)$ à l'aide de $A_m = \sum_{k=0}^m \frac{1}{4^k}\binom{2k}{k}$.

**B.3)** [0.5 pt] On sait par le cours que $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ est DSE sur $]-1,1[$.

Justifier brièvement que pour $|x|<1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$, où $\boxed{a_n = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}}$.

En utilisant la formule de Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}$, on en déduit (*admis ici*) que $a_n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

**B.4)** [1 pt] On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{A_n = \sum_{k=0}^n a_k}$.

Donner, pour $|x|<1$, une expression simple de $\sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^n$, et en déduire $A_n = 2(n+1)a_{n+1}$.

**B.5)** [0 pt] Retrouver $E(|S_n|) \sim \sqrt{\frac{2n}{\pi}}$.