Interrogation n°21. Corrigé

A.1) - Supposons $\alpha > 1$. On a $\dfrac{1}{(\ln n)^\beta} = \mathfrak{o}\left(n^\varepsilon\right)$ pour tout $\varepsilon > 0$.

A fortiori, $u_n = O\left(\dfrac{1}{n^{\alpha-\varepsilon}}\right)$. On choisit $\varepsilon > 0$ assez petit de sorte que $\alpha - \varepsilon > 1$.

Par comparaison avec les séries de Riemann, $\sum u_n$ converge.

- Supposons $\alpha = 1$. La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t(\ln t)^\beta}$ décroît pour t assez grand.

Donc $\sum u_n$ est de même nature que $\int_e^{+\infty} \dfrac{dt}{t(\ln t)^\beta}$. Or, $\int_e^{+\infty} \dfrac{dt}{t(\ln t)^\beta} = \int_1^{+\infty} \dfrac{du}{u^\beta}$ avec $u = \ln t$ et $\dfrac{dt}{t} = du$.

Par les intégrales de Riemann, $\sum u_n$ converge ssi $\beta > 1$.

- Supposons $\alpha < 1$.
Alors $\dfrac{1}{n(\ln n)^\beta} \geq \dfrac{1}{n}$ pour n assez grand. Donc $\sum u_n$ diverge par comparaison.

A.2) cf cours. *Idée* : Avec $v_n = \dfrac{u_n}{n^\alpha}$, on a $\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) = O\,(\dfrac{1}{n^2})$, donc $(\ln(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$. converge.
Avec $L = \lim_{n\to+\infty} \ln(v_n)$, on a donc $u_n \sim e^L n^\alpha$. Par comparaison, $\sum u_n$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leq 1$.

A.3) a) On a $\forall n \geq p,\ a_n \leq K b_n$ avec $K = \dfrac{a_p}{b_p}$. On conclut par comparaison : $a_n = O(b_n)$.

b) On a $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = 1 - \dfrac{\beta}{n} + \mathfrak{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Donc $\left(\dfrac{b_{n+1}}{b_n} - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) \sim \dfrac{\alpha - \beta}{n}$.

Comme $\beta < \alpha$, alors $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ pour n assez grand.
b) Supposons $\alpha > 1$. En choisissant β tel que $1 < \beta < \alpha$, on conclut par a) vu que $\sum b_n$ converge.

d) On considère $a_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\beta}$.
On a $\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{1+1/n} = 1 - \dfrac{1}{n} + \mathfrak{o}\,(\dfrac{1}{n})$ et $\dfrac{\ln n}{\ln(n+1)} = \dfrac{\ln n}{\ln n + O(1/n)} = O\left(\dfrac{1}{n \ln n}\right)$.
D'où $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \dfrac{1}{n} + \mathfrak{o}\,(\dfrac{1}{n})$. Mais par 1) la série diverge lorsque $\beta \leq 1$ et converge si $\beta > 1$.

B. On note d'abord qu'il suffit de prouver l'inégalité $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(x) \leq \exp\left(\dfrac{1}{2}x^2\right)$.

On conclut en effet en l'appliquant à $\dfrac{x}{\sqrt{n}}$ et en composant par $u \longmapsto u^n$ qui est croissante sur $[0, +\infty[$.

B.1) On a $\mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ et $\exp\left(\dfrac{x^2}{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n}}{2^n (n)!}$.
L'inégalité résulte alors de $\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n (n)! = 2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times (2n) \leq (2n)!$

B.2) Par parité, on peut se limiter au cas $x \geq 0$. On pose $f(x) = \ln(\mathrm{ch}(x))$.
On a $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$ et $f''(x) = \dfrac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{ch}(x)} - \left(\dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}\right)^2 \leq 1$.

Donc $f(0) = f'(0) = 0$ et $\forall x \geq 0,\ \ f''(x) \leq 1$. En intégrant deux fois sur $[0, x]$, on a $\forall x \geq 0,\ f(x) \leq \dfrac{1}{2}x^2$.
On en déduit l'inégalité demandée en composant par exp croissante.

C.1) La solution la plus élégante consiste à étudier $f(x) = x^{-1}P(x)$.
On a $\forall x > 0,\ f(x) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{c_k}{x^{n-k}}$, donc $f'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{(n-k)c_k}{x^{n-k+1}} > 0$.
Or, $\lim_{x\to 0, x>0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$, donc par le th de la bijection, f admet un unique zéro.
Or, f et P ont les mêmes zéros sur $]0, +\infty[$. D'où le résultat.

Remarque : Une autre méthode consiste à dériver P et à raisonner par récurrence sur $n = \deg P$, car $\frac{1}{n}P'$ est de la même forme (c'est-à-dire $x^{n-1} - \sum_{k=0}^{n-2} b_k x^k$, avec $b_k > 0$).

C.2) a) Posons $L = (x_1 \ ... \ x_n)$.

La système $LM = \lambda M$ s'écrit $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = \lambda x_1$ et $\forall j \in [\![2, n]\!]$, $b_{j-1}x_{j-1} = \lambda x_j$.

On obtient donc $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = \lambda x_1$ et $\forall j \in [\![2, n]\!]$, $x_j = \dfrac{b_1 ... b_{j-1}}{\lambda^{j-1}} x_1$. On pose $c_j = a_j b_1 ... b_{j-1} > 0$.

Par 1), il existe un unique réel strictement positif λ vérifiant $\sum_{j=1}^{n} c_j \lambda^{n-j} = \lambda^n$.

Donc l'unique solution est (λ, L), où $L = x_1 \left(c_j \lambda^{n-j}\right)_{1 \leq j \leq n}$, avec $x_1 = \dfrac{1}{\sum_{j=1}^{n} c_j \lambda^{n-j}}$.

C.3) Par 2), λ est valeur propre de M^T, donc aussi de M (même polynôme caractéristique).

Supposons X vérifiant $MX = \lambda X$. On a $a_n x_1 = \lambda x_n$ et $\forall j \in [\![1, n-1]\!]$, $a_j x_1 + b_j x_{j+1} = \lambda x_j$.

Par récurrence **descendante** sur j, les x_j sont déterminés par x_1 et **de même signe** que x_1.

Donc le sev propre E_λ de M est une droite de la forme $\mathbb{R}Z$, où $Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}_+^*)$.

On a $\mu = LZ = \sum_{k=1}^{n} a_k z_k > 0$, avec $a_k > 0$ et $z_k > 0$. Donc l'unique solution est $X = \mu^{-1} X$.

D.1) $(X_1, ..., X_n)$ et $(Y_1, ..., Y_n)$ ont même loi, car $P(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k = x_k)$.

Donc (par la proprité du rappel), $f(X_1, ..., X_n) \sim f(Y_1, ..., Y_n)$.

D.2) a) Par la formule des probas totales,

$P(ZX = x) = \frac{1}{2} P(ZX = x \mid Z = 1) + \frac{1}{2} P(ZX = x \mid Z = -1)$.

Or, $P(ZX = x \mid Z = 1) = P(X = x \mid Z = 1) = P(X = x)$ car X et Z sont indépendantes.

De même, $P(ZX = x \mid Z = -1) = P(X = -x)$.

Comme X et $-X$ ont même loi, on obtient $P(ZX = x) = P(X = x)$. Donc X et ZX ont même loi.

b) On a $P(XZ = x, YZ = y) = \frac{1}{2} P(XZ = x, YZ = y \mid Z = 1) + \frac{1}{2} P(XZ = x, YZ = y \mid Z = -1)$.

De même qu'au a), on a $P(XZ = x, YZ = y) = \frac{1}{2} P(X = x, Y = y) + \frac{1}{2} P(X = -x, Y = -y)$.

Or, $P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$. et $P(X = -x, Y = -y) = P(X = -x)P(Y = -y)$.

Donc $P(XZ = x, YZ = y) = \frac{1}{2} P(X = x)P(Y = y) + \frac{1}{2} P(X = x)P(Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$.

Par a), on obtient $P(XZ = x, YZ = y) = P(XZ = x)P(YZ = y)$. Donc XZ et YZ sont indépendantes.

D.3) a) Par 1), A a meme loi que la matrice aléatoire $B = (-X_1, ..., X_n)$ obtenue en changeant le signe de la première colonne de A. Donc $\det A$ et $\det B$ ont même loi. Mais $\det B = -\det A$.

Donc la loi de $\det A$ est symétrique.

b) En multipliant la i-ième ligne par X_{i1}, avec $1 \leq i \leq n$, et en multipliant la j-ième colonne par $X_{11}X_{1j}$, avec $2 \leq j \leq n$, on a

$$\det A = (X_{11})^n \left(\prod_{i=2}^{n} X_{i1}\right) \left(\prod_{j=2}^{n} X_{1j}\right) \det M \ , \quad \text{où} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & Y_{22} & Y_{23} & \cdots & Y_{2n} \\ 1 & Y_{32} & Y_{33} & & Y_{n3} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & Y_{n2} & Y_{n3} & \cdots & Y_{nn} \end{pmatrix}$$

avec $\forall i \geq 2$, $\forall j \geq 2$, $Y_{ij} = X_{ij} X_{i1} X_{1j} X_{11}$.

Il résulte de 2) a) et de la propriété admise que les Y_{ij} sont indépendantes et de même loi de Rademacher. Il résulte donc de 1) que $\det M$ et $\det B$ ont même loi.

Or, $Z = (X_{11})^n \left(\prod_{i=2}^{n} X_{i1}\right) \left(\prod_{j=2}^{n} X_{1j}\right)$ est une v.a. de Rademacher indépendante des X_{ij}, avec $i \geq 2$ et $j \geq 2$, donc des Y_{ij} (à nouveau par par 2) b)), donc de $\det M$.

On en déduit que $\det A$ et $\det M$ ont même loi, et on conclut que $\det A$ et $\det B$ ont même loi.