Interrogation n°21. *Barème sur 27 pts. Durée 1h45*

Exercice A. Séries de Bertrand, variante du critère de Raabe-Duhamel

1) [3.5 pts] *Séries de Bertrand***.** Soient α et β réels. On considère $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$.

Montrer que $\sum u_n$ converge ssi $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

2) *Question hors-interrogation. Critère de Raabe-Duhamel***.**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle strictement positive. On suppose $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + O\,(\dfrac{1}{n^2})$.

Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $u_n \sim \lambda n^{-\alpha}$. En déduire une CNS pour que $\sum u_n$ converge.

3) (*inspiré Oral ENS PC*)

a) [2 pts] Soient a et b deux suites réelles strictement positives et $p \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \geq p, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

Montrer que si $\sum b_n$ converge, alors $\sum a_n$ converge.

b) [1.5 pt] On suppose

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \mathfrak{o}\,(\frac{1}{n})$$

Soit $\beta < \alpha$. On pose $b_n = \dfrac{1}{n^\beta}$. Montrer que pour n assez grand, on a : $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$.

c) [1 pt] En déduire avec les hypothèses de b) que si $\alpha > 1$, alors $\sum a_n$ converge.

d) *Question supplémentaire.* Montrer par deux exemples que si $\alpha = 1$, on ne peut rien conclure.

Exercice B

Montrer de deux façons que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\boxed{\left(\mathrm{ch}\left(\dfrac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)^n \leq \exp\left(\dfrac{1}{2}x^2\right)}$:

1) [2 pts] En utilisant les développements en série entière.

2) [2 pts] En étudiant la dérivée seconde de la fonction $f(x) = \ln(\mathrm{ch}(x))$.

Exercice C (*extrait X PC 2023*)

On note $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}_+^*)$ l'ensemble des vecteurs colonnes à coefficients réels strictement positifs.

On note $\mathcal{L}$ l'ensemble des matrices lignes $(a_1 \;...\; a_n)$ avec $a_j \in \mathbb{R}_+^*$ et $\sum_{j=1}^n a_j = 1$.

1) [2 pts] Soient des réels strictement positifs $c_0, .c_1, ..., c_{n-1}$.

Montrer que le polynôme $P(x) = x^n - \sum_{k=0}^{n-1} c_k x^k$ admet sur $]0, +\infty[$ une unique racine ρ.

2) [2.5 pts] Soient des réels strictement positifs $a_1, ..., a_n$ et $b_1, ..., b_{n-1}$. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ a_2 & 0 & b_2 & & \\ \vdots & & 0 & \ddots & \\ a_{n-1} & & & \ddots & b_{n-1} \\ a_n & & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Montrer qu'il existe un unique couple $(\lambda, L) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathcal{L}$ tels que $LM = \lambda M$.

3) [2.5 pts] Montrer qu'il existe un unique $X \in \mathbb{R}_+^* \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}_+^*)$ tel que $MX = \lambda X$ et $LX = 1$.

Exercice D. Lois symétriques et matrices aléatoires

Propriété de transfert des lois : On rappelle que si X et Y sont deux variables aléatoires de même loi (on note $X \sim Y$) et si f est une fonction (définie sur $\operatorname{Im} X$), alors $f(X)$ et $f(Y)$ ont même loi.

1) [1 pt] Soient $(X_1, ..., X_n)$ et $(Y_1, ..., Y_n)$ deux famille de v.a. mutuellement indépendantes.

On suppose que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $X_i \sim Y_i$. Montrer que $f(X_1, ..., X_n) \sim f(Y_1, ..., Y_n)$.

2) On dit que la loi de X est symétrique ssi X et $-X$ ont même loi.

On considère deux variables aléatoires **symétriques** X et Y.

Soit Z une variable de Rademacher, c'est-à-dire $P(Z = 1) = P(Z = -1) = \dfrac{1}{2}$.

On suppose que X, Y et Z sont indépendantes.

a) [1 pt] Montrer que X et ZX ont même loi.

b) [2 pts] Montrer que XZ et YZ sont indépendantes.

3) On considère désormais une matrice aléatoire $A = (X_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On suppose que les X_{ij} sont des variables (mutuellement) indépendantes de même loi de Rademacher.

On *admet* la généralisation de 2) b) : Si Z est une v.a. de Rademacher indépendante des X_{ij}, alors les variables $X_{ij}Z$ sont indépendantes et ont même loi de Rademacher.

a) [2 pts] Montrer que la loi de $\det A$ est symétrique.

b) [2 pts] ($\bigstar$) On considère B la matrice aléatoire obtenue en remplaçant dans la matrice A la première colonne et la première ligne par des 1. Montrer que $\det A$ et $\det B$ ont même loi.

Indication : Utiliser des opérations sur les lignes et les colonnes.