Interrogation n$^{\text{o}}$20 bis. Corrigé

Partie A.

1) a) On a $\varphi(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{z^n t^n}{n}$ série entière en t de rayon $R = \frac{1}{|z|} > 1$.

Donc φ est C^∞, et on a $\varphi'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} z^n t^{n-1} = \dfrac{z}{1-tz}$.

Remarque : On peut aussi revenir au th sur les séries de fonctions $\sum f_n(t)$, avec $f_n(t) = \dfrac{z^n t^n}{n}$.

$\sum f_n$ converge simplement et $\sum f_n'$ converge normalement sur $[0,1]$, car $\sup_{[0,1]} |f_n'| = |z|^n$.

b) On a $\phi'(t) = ((1-tz)\varphi'(t) - z)\exp(\varphi(t)) = 0$, donc φ est constante sur l'intervalle $[0,1]$.

En particulier, on a $\varphi(1) = \varphi(0)$, c'est-à-dire $\exp\left(L(z)\right) = 1/(1-z)$.

2) a) On a $|L(z)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{|z|^n}{n} = -\ln(1-|z|)$ par le cours (cf DSE des fonctions usuelles).

b) On a $L(z^k) = O(|z|^k)$ et comme $\sum |z|^k$ converge, alors $\sum L(z^k)$ converge absolument.

3) Par 1) b), on a : $\left(\prod_{k=0}^{N} \dfrac{1}{1-z^k}\right) = \exp\left(\sum_{k=0}^{N} L(z^k)\right)$.

Par passage à la limite et par continuité de exp, $\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{N} \dfrac{1}{1-z^k}$ existe et vaut $\exp\left(\sum_{k=0}^{+\infty} L(z^k)\right)$.

4) a) Si $\sum_{k=1}^{N} kp_k = n$, on a $0 \leq p_k \leq \dfrac{n}{k} \leq n$. Donc a fortiori $a_N(n) \leq (n+1)^N$.

Ainsi, $a_N(n) = O(n^N)$ lorsque n tend vers $+\infty$, donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_N(n)\, x^n$ admet un rayon de convergence $R \geq 1$.

b) Lorsque $(p_1, ..., p_N) \in E_N(n)$, on a nécessairement $p_N \leq \dfrac{n}{N}$, c'est-à-dire $p_N \leq \left\lfloor \dfrac{n}{N} \right\rfloor$.

Pour construire une suite $(p_1, ..., p_N) \in E_N(n)$, on choisit donc pour p_n un entier $q \leq \left\lfloor \dfrac{n}{N} \right\rfloor$, puis une famille $(p_1, ..., p_{N-1})$ telle que $\sum_{k=1}^{N-1} kp_k = n - qN$.

On en déduit une bijection entre $E_N(n)$ et l'union disjointe des $E_{N-1}(n-qN)$, où $0 \leq q \leq \left\lfloor \dfrac{n}{N} \right\rfloor$.

Donc $a_N(n) = \sum_{q=0}^{\lfloor n/N \rfloor} a_{N-1}(n-qN)$.

c) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $\forall\, |x| < 1$, $f_N(x) = f_{N-1}(x)\, \dfrac{1}{1-x^N}$.

On a $\dfrac{1}{1-x^N} = \sum_{q=0}^{+\infty} x^{qN} = \sum_{n=0}^{+\infty} c(n)x^n$, avec $c(n) = 1$ si N divise q, et $c(n) = 0$ sinon.

Les deux séries entières $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{N-1}(n)\, x^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} c(n)x^n$ ont un rayon de convergence ≥ 1.

Les deux séries convergent donc absolument (car $|x| < 1$). Par produit de Cauchy, on a

$$\forall\, |x| < 1, \qquad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{N-1}(n)\, x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} c(n)x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_{N-1}(n-k)c(k)\right) x^n$$

Or, $\sum_{k=0}^{n} a_{N-1}(n-k)c(k) = \sum_{k \text{ multiple de } N} a_{N-1}(n-k) = \sum_{q=0}^{\lfloor n/N \rfloor} a_{N-1}(n-qN)$, donc $= a_N(n)$ par a).

On obtient ainsi $f_{N-1}(x)\, \dfrac{1}{1-x^N} = f_N(x)$.

De plus, $f_0(x) = 1$, car $a_0(n) = 0$ si $n \in \mathbb{N}^*$, et $a_0(n) = 1$.

Par récurrence immédiate sur $N \in \mathbb{N}$, on obtient donc bien $f_N(x) = \prod_{k=1}^{N} \dfrac{1}{1-x^k}$.

5) a) On fixe $n \in \mathbb{N}$. Comme $p_k \leq \dfrac{n}{k}$, alors $\forall k > n$, $p_k = 0$. Donc $\forall N > n$, $a_N(n) = a_n(n)$.

Ainsi la suite $(a_N(n))_{N\in\mathbb{N}}$ est stationnaire à partir du rang n. A fortiori, $\lim_{n\to+\infty} a_N(n) = a_n(n) = b(n)$.

La suite $(a_N(n))_{N\in\mathbb{N}}$ est aussi croissante, car $a_N(n) \geq a_{N-1}(n)$ (cf 4) a) par exemple).

b) Soit $M \in \mathbb{N}$. On a $\sum_{n=0}^{M} a_N(n)\ x^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_N(n)\ x^n = f_N(x)$. Or, $\lim_{N\to+\infty} a_N(n) = b(n)$.

Par passage à la limite $N \to +\infty$, on en déduit $\sum_{n=0}^{M} b(n)\ x^n \leq \lim_{n\to+\infty} f_N(x) = g(x)$.

En faisant tendre M vers $+\infty$, on en déduit que $\sum b(n)\ x^n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} b(n)\ x^n \leq g(x)$.

D'autre part, les suites $N \to a_N(n)$ sont croissantes, donc $a_N(n) \leq b(n)$.

On en déduit $f_N(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_N(n)\ x^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} b(n)\ x^n$.

Par passage à la limite des inégalités larges, on obtient $g(x) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} b(n)\ x^n$.

On en conclut par double encadrement que $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b(n)\ x^n$.

Remarque : On pourrait aussi utiliser le th de cv dominée pour les séries, car $\lim_{n\to+\infty} a_N(n) = b(n)$

Sachant que $0 \leq a_N(n) \leq b(n)$, il faut de toute façon prouver d'abord la convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} b(n)\ x^n$.

6) a) L'existence de l'intégrale va résulter de l'application du théorème ITT (cf énoncé du théorème).

On pose $f_n(t) = -\dfrac{e^{-nt}}{n}$ et $\forall t > 0$, $\phi(t) = \ln(1 - e^{-t}) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{e^{-nt}}{n}$.

- On a bien $\phi = \sum_{n=0}^{+\infty}$ continue sur $]0, +\infty[$.

- De plus, f_n est intégrable et $\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\ dt = \int_0^{+\infty} f_n(t)\ dt = \dfrac{1}{n^2}$.

- Ainsi, $\sum \int_0^{+\infty} |f_n(t)|\ dt$ converge.

Par le théorème ITT, ϕ est intégrable et $\int_0^{+\infty} \phi(t)\ dt = -\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = -\dfrac{\pi^2}{6}$.

b) On fixe $0 < x < 1$. On effectue le changement de variable affine $u = -t \ln x$.

On obtient donc $J(x) = \dfrac{-1}{-\ln x} \int_0^{+\infty} \ln(1 - e^{-t})\ dt = \dfrac{-1}{\ln x} \dfrac{\pi^2}{6} \sim \dfrac{\pi^2}{6(1-x)}$ car $\ln x \sim (1 - x)$.

7) a) L'application $t \longmapsto -\ln(1 - x^{-t})$ est (positive et) décroissante sur $]0, +\infty[$.

Par comparaison entre sommes et intégrales, on a donc

$$-\sum_{k=1}^{+\infty} \ln(1 - x^k) \leq \int_0^{+\infty} -\ln(1 - x^t)\ dt$$

En composant par la fonction croissante exp, on obtient bien $g(x) \leq \exp\left(J(x)\right)$.

b) Soit $0 < x < 1$. Comme les b_n sont positifs, on a $b_n x^n \leq g(x)$, et donc $b_n \leq \dfrac{\exp\left(J(x)\right)}{x^n}$.

On prend $x_n = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. On a donc $b_n \leq (x_n)^{-n} \exp\left(J(x_n)\right)$.

On a $J(x_n) \sim \dfrac{\pi^2}{6}\sqrt{n}$, donc $J(x_n) \leq 2\sqrt{n}$ pour n assez grand (car $\dfrac{\pi^2}{6} < 2$).

De même $\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n} = \exp\left(-n \ln\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \leq \exp\left(2\sqrt{n}\right)$ pour n assez grand.

(en effet, on a $-\ln(1 - \varepsilon) \sim \varepsilon$ en $\varepsilon = 0$, donc $-\ln(1 - \varepsilon) \leq 2\varepsilon$ pour ε assez petit).

On en déduit que $b_n \leq \exp\left(4\sqrt{n}\right)$ pour n assez grand.