Interrogation n°20 bis. *Barème sur 24 pts. Durée 1h20mn*

Remarque : à toutes fins utiles, on rappelle qu'il n'existe pas de logarithme sur $\mathbb{C}$.

Et qu'en revanche, la fonction logarithme réelle est bien définie et que son DSE sur $]-1,1[$ est au programme !

Partie A

Pour $|z|<1$, on considère $\boxed{L(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n}}$. Dans cette partie, z est un nombre complexe tel que $|z|<1$.

1) a) [1.5 pt] Justifier brièvement que $\varphi : t \longmapsto L(tz)$ est de classe C^1 sur $[0,1]$ et calculer $\varphi'(t)$.

b) [1 pt] Montrer que $\phi : t \longmapsto (1-tz)\exp(L(tz))$ est constante sur $[0,1]$ et en déduire

$$\exp\left(L(z)\right)=\frac{1}{1-z}$$

.**2)** a) [1 pt] Montrer que $|L(z)|\leq -\ln(1-|z|)$.

b) [1.5 pt] Montrer que la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*}L(z^k)$ converge.

3) [2 pts] En déduire que $\lim_{N\to+\infty}\prod_{k=1}^{N}\frac{1}{1-z^k}$ existe (qu'on note $\prod_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{1-z^k}$) et que

$$\prod_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{1-z^k}=\exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty}L(z^k)\right)$$

Partie B

Pour n et $N\in\mathbb{N}$, on note $E_N(n)$ l'ensemble des N-uplets d'entiers $(p_1,...,p_N)\in\mathbb{N}^N$ tels que

$$\sum_{k=1}^{N}k\ p_k=n \quad , \quad \text{c'est-à-dire}\ \ p_1+2p_2+3p_3+...+Np_N=n$$

On pose $a_N(n)=\operatorname{card}E_N(n)$. On a en particulier, $a_0(n)=0$ si $n\in\mathbb{N}^*$, et $a_0(0)=1$.

4) a) [1.5 pt] Soit $N\in\mathbb{N}$.

En utilisant une majoration simple de $a_N(n)$, montrer que la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}}a_N(n)\ x^n$ est de rayon $R\geq 1$.

b) [2 pts] Soit $N\in\mathbb{N}^*$. Justifier que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$a_N(n)=\sum_{q=0}^{\lfloor n/N\rfloor}a_{N-1}(n-qN)$$

c) [2.5 pts] Soit $N\in\mathbb{N}$. Par a), pour $|x|<1$, on peut poser

$$f_N(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_N(n)\ x^n$$

Montrer que pour tout $|x|<1$,

$$f_N(x)=\prod_{k=1}^{N}\frac{1}{1-x^k}.$$

Suggestion pour la rédaction : Noter $c(n)$ les coefficients du DSE de $\frac{1}{1-x^N}=\sum_{n=0}^{+\infty}c(n)x^n$.

5) a) [1 pt] Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $b(n) = a_n(n)$. Justifier que $\lim_{N\to+\infty} a_N(n) = b(n)$.

b) [2 pts] (★) Soit $0 \leq x < 1$. On sait par la partie A qu'il existe

$$g(x) = \lim_{N\to+\infty} f_N(x) = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1-x^k}$$

.Montrer que

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b(n)\ x^n$$

.*Indication* : Justifier d'abord que $\forall M \in \mathbb{N},\ \sum_{n=0}^{M} b(n)\ x^n \leq \lim_{N\to+\infty} f_N(x)$.

Partie C

On donne $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

6) a) [2.5 pts] En utilisant un DSE, montrer que $t \longmapsto \ln(1-e^{-t})\ dt$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et que

$$\int_0^{+\infty} \ln(1-e^{-t})\ dt = -\frac{\pi^2}{6}$$

b) [1 pt] Pour $0 \leq x < 1$, on pose $\boxed{J(x) = -\int_0^{+\infty} \ln(1-e^{t\ln x})\ dt}$, c'est-à-dire $J(x) = -\int_0^{+\infty} \ln(1-x^t)\ dt$.

En utilisant un changement de variable affine, montrer que $J(x) \sim \dfrac{\pi^2}{6(1-x)}$ lorsque x tend vers 1^-.

7) a) [1.5 pt] Soit $0 < x < 1$. Par la partie A, on a

$$g(x) = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1-x^k} = \exp\left(-\sum_{k=1}^{+\infty} \ln(1-x^k)\right).$$

Montrer que $g(x) \leq \exp\left(J(x)\right)$.

b) [2 pts] On sait par la partie B que g est DSE sur $[0,1[$: on a $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\ x^n$, avec $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n \in \mathbb{N}$.

En prenant $x_n = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, déterminer une constante K telle que $\boxed{b_n \leq \exp\left(K\sqrt{n}\right)}$ pour n assez grand.

Remarque culturelle :

$b(n)$ représente le nombre de façon de décomposer l'entier n sous la forme $n = \sum_{k=1}^{+\infty} k\ p_k$, où $p_k \in \mathbb{N}$.

On peut montrer qu'il existe des constantes α et β telles que $b(n) \sim \dfrac{\exp(\alpha\sqrt{n})}{\beta n} = \lambda_n$.

Dans le sujet Mines PC-PSI 2022, on montre que $b(n) = O_{+\infty}(\lambda_n)$, qui améliore 7) b).