Interrogation n°20. Corrigé

1) a) $\forall X \neq 0$, $(X \mid A^T AX) = \|AX\|^2 > 0$ car $AX \neq 0$, A étant inversible.

b) Par le th spectral, $A^T A = UDU^T$, où $U \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, où $\lambda_j > 0$.

Donc $S = U\,\mathrm{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_n})U^T$ est bien symétrique, à spectre strictement positif et $S^2 = A^T A$.

c) On a $\|A\|^2 = \mathrm{tr}(A^T A) = \mathrm{tr}(S^2) = \sum_{j=1}^n \lambda_j^2$.

d) On a $(S^{-1})^T = (S^T)^{-1} = S^{-1}$. D'où $U^T U = S^{-1}A^T AS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n$. Donc U est orthogonale.

e) $A^T \in GL_n(\mathbb{R})$ s'écrit donc sous la forme $A^T = US$, où $U \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Donc $A = SU^T$, ce qui permet de conclure car $U^T \in O_n(\mathbb{R})$.

f) On a $A = US$, et on applique le théorème spectral à S. On obtient bien $A = UV^T DV$ qui convient, car $UV^T \in O_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Sp}(D) = \mathrm{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+^*$.

2) a) Avec $Z = X + Y$, on a $(Z \mid AZ) = 0$, d'où en développant $(X \mid AY) + (AX \mid Y) = 0$.

On a $a_{ij} = (E_i \mid AE_j)$, donc $a_{ij} = -a_{ji}$, donc A antisymétrique.

b) On a $(A^2)^T = (-A)^2 = A^2$ et $\forall X$, $\left(X \mid A^2X\right) = \left(A^T X \mid AX\right) = -\left(AX \mid AX\right) = -\|AX\|^2 \leq 0$.

Variante : On a $A^2 = -A^T A$ matrice de Gram : par la preuve du 1) a), on a bien $A^2 \in S_n^-(\mathbb{R})$.

c) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A. Alors λ^2 est valeur propre de A^2 (avec le même vecteur propre).

Par b), $\lambda^2 \in \mathbb{R}^-$ (car A^2 diagonalisable dans $\mathbb{R}$ de valeurs propres réelles négatives). D'où $\lambda \in i\mathbb{R}$.

3) a) On a $\det\left(\begin{array}{c|c} xI_n & A \\ \hline B & I_p \end{array}\right) \det\left(\begin{array}{c|c} I_n & O_{n,p} \\ \hline -B & xI_p \end{array}\right) = \det\left(\begin{array}{c|c} xI_n & A \\ \hline B & I_p \end{array}\right) \det\left(\begin{array}{c|c} I_n & -A \\ \hline O_{p,n} & xI_p \end{array}\right)$.

Donc $\det\left(\begin{array}{c|c} xI_n - AB & * \\ \hline O_{p,n} & xI_p \end{array}\right) = \det\left(\begin{array}{c|c} xI_n & O_{n,p} \\ \hline * & xI_p - BA \end{array}\right)$, c'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^p\chi_{AB}(x) = x^n\chi_{BA}(x)$.

Remarque : Ainsi, χ_{AB} et χ_{BA} ont les mêmes racines non nulles (avec les mêmes ordres de multiplicité).

b) Les matrices $A^T A$ et AA^T sont symétriques réelles positives, donc diagonalisables dans des BON (de $\mathbb{R}^p$ et de $\mathbb{R}^n$) et leurs valeurs propres sont positives. En appliquant a) avec $B = A^T$, on en déduit que $A^T A$ et AA^T ont les mêmes valeurs propres non nulles. D'où le résultat.

Remarque culturelle : Lorsque $n = p$, les matrices AA^T et $A^T A$ sont donc orthosemblables.

c) $(U_j \mid U_k) = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_j\lambda_k}}(A^T AV_j \mid V_k) = \dfrac{\lambda_j}{\sqrt{\lambda_j\lambda_k}}(V_j \mid V_k) = \delta_{jk}$, donc $(U_1, ..., U_r)$ est orthonormée.

d) On complète $(U_1, ..., U_r)$ en une BON $\mathcal{C} = (U_1, ..., U_p)$ de $\mathbb{R}^p$.

Ainsi, $U \in O_p(\mathbb{R})$.

Notons a l'application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ canoniquement associée à A.

On a $\forall j \in [\![1, r]\!]$, $AV_j = \sqrt{\lambda_j}U_j$. Il reste à vérifier que $\forall j > r$, $AV_j = 0$.

Or, on a $\forall j > r$, $A^t AV_j = 0$. Il suffit donc de prouver que $\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Ker}\, A^T A$.

On a $\mathrm{Ker}\, A \subset \mathrm{Ker}\, A^T A$ évident et l'autre inclusion résulte de $X^T A^T AX = \|AX\|^2$.

Donc on obtient bien $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\, a = \left(\begin{array}{c|c} D & O_{r,p-r} \\ \hline O_{n-r,r} & O_{n-r,p-r} \end{array}\right)$.

Or, par la formule de changement de bases, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\, a = U^{-1}AV = U^T AV$. D'où le résultat.

Autre méthode : On a $(U^T AV)_{ij} = (U_i \mid (AV)_j) = (U_i \mid AV_j)$.

Pour $1 \leq j \leq r$, on obtient $(U_i \mid AV_j) = \sqrt{\lambda_j}(U_i \mid U_j) = \sqrt{\lambda_j}$, et pour $j > r$, $(U_i \mid AV_j) = 0$ car $AV_j = 0$.

4) a) A est diagonalisable dans une base orthonormée $\mathcal{B} = (Z_1, ..., Z_n)$ telle que $AZ_j = \lambda_j Z_j$.

En posant $X = \sum_{j=1}^n x_j Z_j$, on a alors $(X \mid AX) = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j^2 \geq \mu \sum_{j=1}^n x_j^2 = \mu \|X\|^2$.

b) On a $\varphi'(t) = (X'(t) \mid AX(t)) + (X(t) \mid AX'(t)) + 2(X'(t) \mid X''(t))$.

Comme A est symétrique, on a $(X(t) \mid AX'(t)) = (X'(t) \mid AX(t))$.

Avec $X''(t) = -AX(t)$, on obtient $\varphi'(t) = 2(X'(t) \mid AX(t)) - 2(X'(t) \mid X''(t)) = 0$. Donc φ constante.

Remarque culturelle : $\varphi(t)$ correspond en Physique à l'énergie totale et l'équation $X'' = -AX$ correspond à l'équation fondamentale de la dynamique d'un système non dissipatif (ici, pas de terme en X').

c) Avec les notations de a), $\mu > 0$, donc par b), $\varphi(t) \geq (X(t) \mid AX(t)) \geq \mu \|X(t)\|^2$.

Or, φ est constante, donc φ est a fortiori majorée, et il en est de même de $t \longmapsto \|X(t)\|$. D'où le résultat.

d) On considère une base $\mathcal{B}$ composée de vecteurs propres de A.

On conclut en considérant le produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ pour lequel $\mathcal{B}$ est orthonormée : il s'agit du produit scalaire $\langle X, Y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, où les x_i et les y_i sont les coordonnées de X et Y dans $\mathcal{B}$.

5) a) Par définition, $g_n \in F_n$.

Il reste à prouver que $f - g_n \in (F_n)^\perp$, c'est-à-dire $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $\langle g_n - f, e_k\rangle = 0$.

Or, $\langle g_n, e_k\rangle = \sum_{j=0}^n \langle f, e_j\rangle \langle e_j, e_k\rangle = \sum_{j=0}^n \langle f, e_j\rangle \delta_{jk} = \langle f, e_k\rangle$, d'où $\langle g_n - f, e_k\rangle = 0$.

b) Par Pythagore, $\|f\|^2 = \|f - g_n\|^2 + \|g_n\|^2 \geq \|g_n\|^2 = \sum_{k=0}^n \langle f, e_k\rangle^2$. On conclut en faisant $n \to +\infty$.

c) Comme $f_n \in F$, alors $\|f - f_n\| \geq d(f, E_n) = \|f - g_n\|$. Par pincement, $\lim_{n\to+\infty} \|f - g_n\| = 0$.

Par continuité de la norme, $\lim_{n\to+\infty} \|g_n\| = \|f\|$. Donc par b), $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^n \langle f, e_k\rangle^2 = \|f\|^2$.

6) a) Comme f est symétrique, E est la somme directe orthogonale de ses sev propres.

On peut donc considérer une BON $(e_1, ..., e_n)$ adaptée à cette somme dircte orthogonale.

D'une part $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$ car $(e_1, ..., e_n)$ BON , et d'autre part, $\langle e_i, f(e_j)\rangle = \langle e_i, \lambda_j e_j)\rangle = \lambda_j \delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

b) On a $\left\langle X, A^{-1}BY\right\rangle = (X \mid AA^{-1}BY) = (X \mid BY)$, donc symétrique en (X, Y), car B symétrique (pour le psc).

Ainsi, $\left\langle X, A^{-1}BY\right\rangle = \left\langle Y, A^{-1}BX\right\rangle$, c'est-à-dire $A^{-1}B$ est symétrique pour $\langle\ ,\ \rangle$.

c) On applique a) à l'endomorphisme f associé à $A^{-1}B$ dans $E = \mathbb{R}^n$ muni du ps $\langle\ ,\ \rangle$.

Il existe donc une base $(X_1, ..., X_n)$ telle que $\langle X_i, X_j\rangle = \delta_{ij}$ et $\left\langle X_i, BA^{-1}X_j\right\rangle = 0$ si $i \neq j$.

Ce qui donne les propriétés souhaitées : $(X_i \mid AX_j) = \delta_{ij}$ et $(X_i \mid BX_j) = 0$ si $i \neq j$.

d) Il suffit de prendre $P = (X_1, ..., X_n)$, car $\left(P^T AP\right)_{ij} = X_i^t (AX)_j = (X_i \mid AX_j)$ et de même pour B.

e) On sait qu'il existe $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A = S^2$. Alors S^{-1} est symétrique, donc $M = S^{-1}BS^{-1}$ aussi.

Par le théorème spectral, il existe $U \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $U^T S^{-1} M S^{-1} U = D$.

Mais on a aussi $U^T S^{-1} A S^{-1} U = U^T I_n U = U^T U = I_n$. Donc $P = S^{-1}U$ convient.

7) a) Par interpolation de Lagrange, il existe P de degré $\leq n - 1$ tel que $\forall i$, $P(a_i) = f(a_i)$.

Comme $d \geq n - 1$, alors $P \in E$, donc $\Delta(P) = 0$, et ainsi $m = 0$.

b) Par a), il existe un polynôme $L \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $L(a_i) = f(a_i)$.

On munit $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \sum_{i=1}^n P(a_i)Q(a_i)$.

En particulier, $\langle\ ,\ \rangle$ est défini positif car $\sum_{i=1}^n P(a_i)^2 \geq 0$, avec égalité ssi $P = 0$ (car $d < n$).

Alors m est la distance de L au sev $\mathbb{R}_d[X]$, atteint en l'unique projeté orthogonal P de L sur $\mathbb{R}_d[X]$.

8) H est stable par A ssi $\forall y \in H$, $Ay \in H$, donc ssi $\forall y \in H$, $(Ay \mid z) = 0$.

Ce qui équivaut à $\forall y \in H$, $(y \mid A^T z) = 0$, c'est-à-dire $A^T z \in \mathbb{R}z$, car $H^\perp = \mathbb{R}z$.

D'où la CNS : z vecteur propre de A^T.