Interrogation n°20. *Barème sur 25.5 pts. Durée 1h40mn*

Terminologie : auto-adjoint = symétrique ; isométrie = transformation orthogonale.

- on munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique $(X \mid Y) = X^T Y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

- dans tout le sujet, E désigne un espace euclidien muni d'un produit scalaire $\langle x, y \rangle$.

1) *Décomposition polaire*

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme euclidienne canonique $\|A\| = \sqrt{\operatorname{tr}(A^T A)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$.

a) [1 pt] Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. La matrice $A^T A$ est symétrique. Justifier que $A^T A$ est définie positive.

b) [1 pt] Montrer *brièvement* qu'il existe $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $S^2 = A^T A$.

c) [0.5 pt] On note $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les valeurs propres de S. Montrer que $\|A\|^2 = \sum_{j=1}^n \lambda_j^2$.

d) [0.5 pt] On pose $U = AS^{-1}$. Montrer que $U \in O_n(\mathbb{R})$.

e) [0.5 pt] Par d), toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ s'écrit sous la forme $A = US$, où $U \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Montrer aussi qu'il existe $U \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $A = SU$.

f) [0.5 pt] Montrer *brièvement* qu'il existe U et $V \in O_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D à coefficients strictement positifs telle que $A = UDV$.

2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $X^T A X = 0$, c'est-à-dire $(X \mid AX) = 0$.

a) [1.5 pt] Montrer que $\forall (X, Y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $(X \mid AY) = -(AX \mid Y)$. En déduire $A^T = -A$.

b) [1 pt] Montrer que A^2 appartient à $S_n^-(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que A^2 symétrique négative.

c) [0.5 pt] En déduire que les valeurs propres de A sur $\mathbb{C}$ sont imaginaires pures.

3) On considère $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On note $A_1, ..., A_p$ les vecteurs colonnes de A.

a) [1.5 pt] Soit $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. On considère les matrices carrées $AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $BA \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Calculer $\left(\begin{array}{c|c} xI_n & A \\ \hline B & I_p \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} I_n & O_{n,p} \\ \hline -B & xI_p \end{array}\right)$ et $\left(\begin{array}{c|c} xI_n & A \\ \hline B & I_p \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} I_n & -A \\ \hline O_{p,n} & xI_p \end{array}\right)$. En déduire $x^p \chi_{AB}(x) = x^n \chi_{BA}(x)$.

b) [2 pts] Montrer qu'il existe des réels $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_r > 0$, et des matrices $V \in O_p(\mathbb{R})$ et $W \in O_n(\mathbb{R})$ tels que

$A^T A = V \left(\begin{array}{c|c} J & O_{r,p-r} \\ \hline O_{p-r,r} & O_{p-r,p-r} \end{array}\right) V^T$ et $AA^T = W \left(\begin{array}{c|c} J & O_{r,n-r} \\ \hline O_{n-r,r} & O_{n-r,n-r} \end{array}\right) W^T$, où $J = \operatorname{Diag}(\lambda_1, .., \lambda_r)$.

c) [1 pt] On pose $\forall j \in \{1, ..., r\}$, $\boxed{U_j = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_j}} A V_j}$. Montrer que $(U_1, ..., U_r)$ est une famille orthonormée.

d) [2 pts] On considère la matrice diagonale $D = \operatorname{Diag}(\mu_1, .., \mu_r)$ où $\mu_j = \sqrt{\lambda_j}$.

Montrer qu'il existe des matrices $U \in O_n(\mathbb{R})$ et $V \in O_p(\mathbb{R})$ telles que $A = U \left(\begin{array}{c|c} D & O_{r,p-r} \\ \hline O_{n-r,r} & O_{n-r,p-r} \end{array}\right) V^T$.

Indications :

Interpréter $U^T A V$ en termes de changement de bases.

Autre solution : Exprimer les coefficients $(U^T A V)_{ij}$ en fonction de U_i et V_j.

4) Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle. On note a l'endomorphisme canoniquement associé à A.

a) [1 pt] On pose μ la plus petite valeur propre de A. Montrer que $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $\boxed{(X \mid AX) \geq \mu \|X\|^2}$.

b) [1 pt] Soit $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \quad t \longmapsto X(t)$ une fonction vectorielle de classe C^2. On suppose $\boxed{X''(t) = -AX(t)}$.

On pose $\varphi(t) = (X(t) \mid AX(t)) + \|X'(t)\|^2$. Montrer que φ est constante.

c) [1 pt] On suppose $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que X est bornée sur $\mathbb{R}$.

d) [0.5 pt] (★) On suppose ici que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est seulement diagonalisable.

Montrer qu'il existe un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}^n$ pour lequel A est symétrique.

Remarque culturelle : Cela permet ainsi de généraliser c) à toute matrice A diagonalisable.

5) Soit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ l'ev des fonctions continues sur $[0,1]$, muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\, dt$.

Soit $f \in E$. Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille orthonormée de E. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_n = \mathrm{Vect}(e_0, ..., e_n)$.

a) [1 pt] Montrer brièvement que le projeté orthogonal de f sur F_n est $g_n = \sum_{k=0}^{n} \langle f, e_k \rangle e_k$.

b) [1 pt] Montrer l'*inégalité de Bessel* : $\sum_{n=0}^{+\infty} \langle f, e_n \rangle^2 \leq \|f\|^2$.

c) [1 pt] (★) On suppose que $F = \mathrm{Vect}(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dense dans E pour la norme euclidienne.

Il existe donc une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in F_n$ et $\lim_{n \to +\infty} \|f - f_n\| = 0$.

Montrer que $\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle f, e_n \rangle^2$.

6) a) [1 pt] Soit f un endomorphisme symétrique de E.

Montrer qu'il existe une base $(e_1, ..., e_n)$ de E telle que $\forall (i,j)$, $\begin{cases} \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \\ (i \neq j) \Rightarrow \langle e_i, f(e_j) \rangle = 0 \end{cases}$

b) [0.5 pt] On considère désormais $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ symétrique définie positive et $B \in S_n(\mathbb{R})$ symétrique.

On note $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire défini par la matrice A, c'est-à-dire $\boxed{\langle X, Y \rangle = (X \mid AY)}$.

Montrer que l'endomorphisme $A^{-1}B$ est auto-adjoint pour $\langle\ ,\ \rangle$.

c) [1 pt] Montrer qu'il existe une base $(X_1, ..., X_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $\forall (i,j)$, $\begin{cases} X_i^T A X_j = \delta_{ij} \\ (i \neq j) \Rightarrow X_i^T B X_j = 0 \end{cases}$

d) [0.5 pt] Montrer qu'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $P^T A P = I_n$ et $P^T B P$ diagonale.

e) *Question supplémentaire hors-interrogation*

Retrouver le résultat du d) en considérant $M = S^{-1} B S^{-1}$, où $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ est telle que $A = S^2$.

7) Soient $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application et n réels distincts $0 \leq a_1 < ... < a_n \leq 1$.

Soit $d \in \mathbb{N}$. Pour $P \in \mathbb{R}_d[X]$, on considère $\boxed{\Delta(P) = \sum_{i=1}^{n} (P(a_i) - f(a_i))^2}$.

On note $m = \inf \Delta$, c'est-à-dire $m = \inf\{\Delta(P) \mid P \in \mathbb{R}_d[X]\}$.

a) [0.5 pt] On suppose $d \geq n-1$. Montrer que $m = 0$.

b) [1 pt] On suppose $d \leq n-1$. Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_d[X]$ tel que $\Delta(P) = m$.

Suggestion : Munir $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ d'un produit scalaire judicieusement choisi.

8) [1 pt] Soient un vecteur non nul $z \in \mathbb{R}^n$ et un endomorphisme $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On considère l'hyperplan $H = z^\perp$, c'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x \in H$ ssi $(x \mid z) = 0$.

Montrer que H est stable par A ssi z est un vecteur propre de A^T.