Interrogation n°19 bis. Corrigé

Exercice A

1) On a $P(S_n = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}\ \lambda^k\ \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$.

On a $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} \sim \frac{n^k}{k!}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Et $\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \exp\left((n-k)\ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)\right) = \exp\left(-\lambda + \mathfrak{o}\left(1\right)\right) \sim e^{-\lambda}$ lorsque $n \to +\infty$.

On en déduit $P(S_n = k) \sim \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = P(Z = k)$, d'où le résultat.

2) Comme les Y_i sont indépendantes, $G_{Z_n}(t) = G_{Y_1}(t)...G_{Y_n}(t)$.

Or, $G_{Y_i}(t) = \exp(\lambda_i(t-1))$, donc $G_{Z_n}(t) = \exp(\lambda(t-1))$, où $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

Par unicité du DSE, on a $P(Z_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, donc Z_n suit une loi de Poisson de paramètre λ.

3) $P(X \neq Y) = 1 - P(X = Y) = 1 - \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k, Y = k)$.
On a ici $(X = 0, Y = 0) = (X = 0)$ car $(X = 0) \subset (Y = 0)$. De même, $(X = 1, Y = 1) = (Y = 1)$.

On a d'autre part $\forall k \geq 2$, $P(X = k) = 0$, donc $P(X = k, Y = k) = 0$.

On en déduit $P(X \neq Y) = 1 - P(Y = 0) - P(Y = 1) = 1 - (1-p) - pe^{-p} = p - pe^{-p} = f(p)$.

Comme $e^{-p} \geq 1 - p$, alors $(1 - e^{-p}) \leq p$, donc $f(p) \leq p^2$.

4) On a $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $P(X_i \neq Y_i) \leq p_i^2$.
Pour prouver l'inégalité demandée, il suffit de prouver que $P(S_n \neq Z_n) \leq \sum_{i=1}^n P(X_i \neq Y_i)$.

Or, $(S_n \neq Z_n) \subset \bigcup_{1\leq i\leq n}(X_i \neq Y_i)$, car si $S_n(\omega) \neq Z_n(\omega)$, il existe au moins un i tel que $X_i(\omega) \neq Y_i(\omega)$.

On en déduit qu'on a bien $P(S_n \neq Z_n) \leq \sum_{i=1}^n P(X_i \neq Y_i)$.

5) a) $|1_{X\in A} - 1_{Y\in A}|$ est la v.a. $\omega \longmapsto \begin{cases} 1 \text{ si } (X(\omega) \in A \text{ et } Y(\omega) \notin A) \text{ ou } (X(\omega) \notin A \text{ et } Y(\omega) \in A) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Or, si $(X(\omega) \in A$ et $Y(\omega) \notin A)$, alors a fortiori, $X(\omega) \neq Y(\omega)$. De même si $(X(\omega) \notin A$ et $Y(\omega) \in A)$.

Donc $|1_{X\in A} - 1_{Y\in A}| \leq 1_{X\neq Y}$.

Par passage à l'espérance, on a donc $E(|1_{X\in A} - 1_{Y\in A}|) \leq P(X \neq Y)$.

Or, $|P(X \in A) - P(Y \in A)| = |E(1_{X\in A} - 1_{Y\in A})| \leq E(|1_{X\in A} - 1_{Y\in A}|)$. D'où le résultat.

b) On a $s = \sum_{k\in\mathbb{N}} |P(X = k) - P(Y = k)| = \sum_{k\in A}(P(X = k) - P(Y = k)) + \sum_{k\in B}(P(Y = k) - P(X = k))$.
Or, $|P(X \in A) - P(Y \in A)| = \left|\sum_{k\in A} P(X = k) - P(Y = k)\right| = \sum_{k\in A}(P(X = k) - P(Y = k))$.
De même, $|P(X \in B) - P(Y \in B)| = \left|\sum_{k\in B} P(X = k) - P(Y = k)\right| = \sum_{k\in B}(P(Y = k) - P(X = k))$.

On en déduit que $s = |P(X \in A) - P(Y \in A)| + |P(X \in B) - P(Y \in B)|$. Donc par a), $s \leq 2P(X \neq Y)$.

6) a) On reprend les notations de 4). On a donc $P(S_n \neq Z_n) \leq \sum_{i=1}^n p_i^2$.

On sait aussi par 2) que Z_n suit la loi de Poisson de paramètre λ.

On a donc par 5), $\sum_{k\in\mathbb{N}} \left|P(S_n = k) - \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right| = \sum_{k\in\mathbb{N}} |P(S_n = k) - P(Z_n = k)| \leq 2P(S_n \neq Z_n)$.
D'où le résultat.

b) On prend $p_i = \frac{\lambda}{n}$. On suppose aussi $X_1, ..., X_n$ mutuellement indépendantes.

Ainsi, $S_n = X_1 + ... + X_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$.

Par a), $\sum_{k\in\mathbb{N}}\left|P(S_n=k)-\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right|=\sum_{i=1}^n p_i^2\leq\dfrac{\lambda^2}{n}$.

A fortiori, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\left|P(S_n=k)-\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right|\leq\dfrac{\lambda^2}{n}$, donc $\lim_{n\to+\infty}P(S_n=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$.

7) On a aisément $P(X=Y)\leq P(X=0,Y=0)+P(X=1,Y=1)+0\leq\min(1-p,e^{-p})+\min(p,pe^{-p})$.
Comme $e^{-p}\geq 1-p$ et $e^{-p}\leq 1$, on a $P(X=Y)\leq 1-p+pe^{-p}=f(p)$.
Donc $P(X\neq Y)=1-P(X=Y)\geq p(1-e^{-p})$.

Il y a égalité ssi $P(X=0,Y=0)=P(X=0)$ et $P(X=1,Y=1)=P(Y=1)$.
Donc ssi $(X=0)\subset(Y=0)$ et $(Y=1)\subset(X=0)$.

Exercice B

1) a) $\exp(t\langle X,\overrightarrow{v}\rangle$ est de la forme $f(X)$, donc est une variable aléatoire.

On pose $a_k=P(X=\overrightarrow{e_k})$. On a $a_k\exp(t\langle\overrightarrow{e_k},\overrightarrow{v}\rangle)\leq a_k\exp(t\|\overrightarrow{v}\|)$.
La série $\sum_{k\in\mathbb{N}}a_k\exp(t\|\overrightarrow{v}\|)$ converge donc absolument.
Par le théorème du transfert, $\exp(t\langle X,\overrightarrow{v}\rangle$ est d'espérance finie et $L_X(t)=E(\exp(t\langle X,\overrightarrow{v}\rangle).=\sum_{k\in\mathbb{N}}a_k\exp(t\langle\overrightarrow{e_k},\overrightarrow{v}\rangle)$.

b) Posons $f_k(t)=a_k\exp(t\langle\overrightarrow{e_k},\overrightarrow{v}\rangle)$. On a $f_k'(t)=a_k\langle\overrightarrow{e_k},\overrightarrow{v}\rangle\exp(t\langle\overrightarrow{e_k},\overrightarrow{v}\rangle)$.
Donc $\sup_{[0,\rho]}|f_k|\leq Ka_k$, où $K=\rho\|\overrightarrow{v}\|\exp(\rho\|\overrightarrow{v}\|)$.
Ainsi, $\sum_{k\in\mathbb{N}}f_k'$ converge normalement sur tout segment $[0,\rho]$.
On en déduit que $L_X=\sum_{k\in\mathbb{N}}f_k$ est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$ et $L_X'(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\langle\overrightarrow{e_k},\overrightarrow{v}\rangle\exp(t\langle\overrightarrow{e_k},\overrightarrow{v}\rangle)$.
En particulier $L_X'(0)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\langle\overrightarrow{e_k},\overrightarrow{v}\rangle=E(\langle X,\overrightarrow{v}\rangle)$.

c) On a $E(\langle X,\overrightarrow{v}\rangle)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\langle\overrightarrow{e_k},\overrightarrow{v}\rangle$. Or, $\sum_{k=0}^{n}a_k\langle\overrightarrow{e_k},\overrightarrow{v}\rangle=\langle\sum_{k=0}^{n}a_k\overrightarrow{e_k},\overrightarrow{v}\rangle$ par linéarité.
Par continuité de la forme linéaire (en dim finie) $x\longmapsto\langle x,\overrightarrow{v}\rangle$, on a $\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\langle\overrightarrow{e_k},\overrightarrow{v}\rangle=\left\langle\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\overrightarrow{e_k},\overrightarrow{v}\right\rangle$.
Donc $E(\langle X,\overrightarrow{v}\rangle)=\langle E(X),\overrightarrow{v}\rangle=0$.

Remarque : En fait, pour toute forme linéaire (continue) $\varphi:E\to\mathbb{R}$, on a $E(\varphi(X))=\varphi(E(X))$.

2) a) On a $P(\langle S_n,\overrightarrow{v}\rangle\geq\lambda)\leq P(\exp(t\langle S_n,\overrightarrow{v}\rangle)\geq\exp(t\lambda))$, car $x\longmapsto\exp(tx)$ est croissante.
Par Markov (la v.a. étant positive), on obtient $P(\langle S_n,\overrightarrow{v}\rangle\geq\lambda)\leq\dfrac{E(\exp(t\langle S_n,\overrightarrow{v}\rangle)}{\exp(t\lambda)}$.
On a $\exp(t\langle S_n,\overrightarrow{v}\rangle=\prod_{k=1}^n\exp(t\langle X_k,\overrightarrow{v}\rangle)$, donc $E(\exp(t\langle S_n,\overrightarrow{v}\rangle)=E(\exp(t\langle X,\overrightarrow{v}\rangle)^n=L_X(t)^n$.
Donc $P(\langle S_n,\overrightarrow{v}\rangle\geq\lambda)\leq\exp(n\ln L_X(t)-\lambda t)$.

b) On choisit t de sorte à minimiser $t\longmapsto\dfrac{1}{2}nt^2-\lambda t$, donc on prend $t=\dfrac{\lambda}{n}$, d'où le résultat.

c) On considère une base orthonormée $(\overrightarrow{v_1},...,\overrightarrow{v_d})$ de $\mathbb{R}^d$. On a alors $\|S_n\|^2=\sum_{k=1}^d\langle S_n,\overrightarrow{v_k}\rangle^2$.

Lorsque $\|S_n\|^2\geq\lambda^2$, il existe $k\in[\![1,d]\!]$ tel que $\langle S_n,\overrightarrow{v_k}\rangle^2\geq\dfrac{\lambda^2}{d}$.

Donc $(\|S_n\|\geq\lambda)$ est inclus dans la réunion des $(2d)$ événéments $\langle S_n,\overrightarrow{v_k}\rangle\geq\dfrac{\lambda}{\sqrt{d}}$ et $\langle S_n,-\overrightarrow{v_k}\rangle\geq\dfrac{\lambda}{\sqrt{d}}$.

Or, pour tout $\overrightarrow{v}$ de norme 1, $P\left(\langle S_n,\overrightarrow{v}\rangle\geq\dfrac{\lambda}{\sqrt{d}}\right)\leq\exp\left(-\dfrac{1}{2n}\left(\dfrac{\lambda}{\sqrt{d}}\right)^2\right)=\exp\left(-\dfrac{\lambda^2}{2nd}\right)$.

Donc $P(\|S_n\|\geq\lambda)\leq 2d\exp\left(-\dfrac{\lambda^2}{2nd}\right)$.

3) On a $(\ln L_X)''(t)=\dfrac{L_X''(t)}{L_X(t)}-\left(\dfrac{L_X'(t)}{L_X(t)}\right)^2\leq\dfrac{L_X''(t)}{L_X(t)}=\dfrac{E(\langle X,\overrightarrow{v}\rangle^2\omega(t)).}{E(\omega(t)).}$, où $\omega(t)=\exp(t\langle X,\overrightarrow{v}\rangle)$.

Comme $\langle X,\overrightarrow{v}\rangle^2\leq\|X\|^2\|\overrightarrow{v}\|^2=1$, alors $(\ln L_X)''(t)\leq 1$.

Mais $(\ln L_X)''(0)=\ln 1=0$ et $(\ln L_X)'(0)=0$. Donc par Taylor-Lagrange, $\forall t\geq 0$, $\ln L_X(t)\leq\dfrac{1}{2}t^2$.