Interrogation n°19 bis. *Barème sur 25 pts. Durée 1h40*

Exercice A. Théorème des événements rares

Toutes les variables aléatoires considérées sont entières, c'est-à-dire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1) [2 pts] *Un exemple*

Soit un réel $\lambda \geq 0$. Pour tout entier $n \geq \lambda$, on considère une v.a. S_n de loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{\lambda}{n}\right)$.

Soit Z une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ.

Montrer (sans trop détailler les calculs) que la loi de S_n converge vers la loi de Z, c'est-à-dire

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n \to +\infty} P(S_n = k) = P(Z = k)$$

2) [1.5 pt] On considère des v.a. $Y_1, ..., Y_n$ de loi de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1, ..., \lambda_n$.

On suppose que les variables $Y_1, ..., Y_n$ sont (mutuellement) indépendantes. On pose $Z_n = Y_1 + ... + Y_n$.

Justifier que Z_n suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = \lambda_1 + ... + \lambda_n$.

3) [2 pts] Pour tout $p \in [0, 1]$, on pose $f(p) = p(1 - e^{-p})$.

Soit X une variable de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$.

Soit Y une variable de Poisson $\boxed{\text{de même paramètre } p}$.

On suppose que $(X = 0) \subset (Y = 0)$ et que $(Y = 1) \subset (X = 1)$.

Montrer que $P(X \neq Y) = f(p)$. En déduire (*très brièvement*) que $\boxed{P(X \neq Y) \leq p^2}$.

4) [2 pts] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $X_1, ..., X_n$ des variables de Bernoulli indépendantes de paramètres $p_1, ..., p_n$.

On admet qu'il existe des variables de Poisson $Y_1, ..., Y_n$ indépendantes telles que

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad , \qquad P(X_i \neq Y_i) \leq p_i^2$$

On pose $\boxed{S_n = X_1 + ... + X_n}$ et $\boxed{Z_n = Y_1 + ... + Y_n}$. Montrer que $P(S_n \neq Z_n) \leq \sum_{i=1}^n p_i^2$.

5) [4 pts] ($\bigstar$) Soient X et Y deux variables aléatoires entières.

a) Soit $A \subset \mathbb{N}$. Montrer que $|1_{X \in A} - 1_{Y \in A}| \leq 1_{X \neq Y}$ et que $|P(X \in A) - P(Y \in A)| \leq P(X \neq Y)$.

b) En déduire que $\boxed{\sum_{k \in \mathbb{N}} |P(X = k) - P(Y = k)| \leq 2P(X \neq Y)}$.

Indication : Prendre $A = \{k \in \mathbb{N} \mid P(X = k) \geq P(Y = k)\}$ et $B = \mathbb{N} \setminus A = \{k \in \mathbb{N} \mid P(X = k) < P(Y = k)\}$.

6) a) [1.5 pt] Soient $X_1, ..., X_n$ des variables de Bernoulli indépendantes de paramètres $p_1, ..., p_n$.

On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ et $\lambda = \sum_{i=1}^n p_i$. Montrer que

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \left| P(S_n = k) - \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right| \leq 2 \sum_{i=1}^n p_i^2$$

b) [1 pt] En déduire une nouvelle preuve de l'exemple de la question 1).

7) *Question supplémentaire hors-interrogation*

Soit X une variable aléatoire de paramètre p. Montrer que pour toute v.a. Y de loi de Poisson de même paramètre p, on a $P(X \neq Y) \geq p(1 - e^{-p})$ et qu'on peut trouver Y pour laquelle il y a égalité.

Exercice B. Majoration sous-gaussienne

Soit $\Delta = \{\overrightarrow{e_k},\, k \in \mathbb{N}\}$ un ensemble dénombrable de $\boxed{\text{vecteurs unitaires de } \mathbb{R}^d}$, où $\mathbb{R}^d$ est muni du psc $\langle\ ,\ \rangle$.

Soit X une v.a. à valeurs dans Δ. On pose $\forall k \in \mathbb{N}$, $\boxed{a_k = P(X = \overrightarrow{e_k})}$. On suppose $\boxed{E(X) = \overrightarrow{0}}$.

1) [5 pts] Soit $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^d$ un vecteur unitaire. On considère $\forall t \geq 0$, $\boxed{L_X(t) = E(\exp(t \langle X, \overrightarrow{v}\rangle))}$.

a) Soit $t \geq 0$. Justifier que $Y = \exp(t\langle X, \overrightarrow{v}\rangle)$ est une variable aléatoire d'espérance finie.

b) Montrer que L_X est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ et que $L'_X(0) = E(\langle X, \overrightarrow{v}\rangle)$.

c) En déduire que $L'_X(0) = 0$.

2) Soient $X_1, ..., X_n$ variables aléatoires indépendantes et de même loi que X.

On pose $\boxed{S_n = \sum_{k=1}^n X_k}$. Soit $\lambda > 0$.

a) [3 pts] Montrer que pour tout $t \geq 0$, on a

$$P(\langle S_n, \overrightarrow{v}\rangle \geq \lambda) \leq \exp(n \ln L_X(t) - \lambda t)$$

b) [0.5 pt] On *admet* $\forall t \geq 0$, $\ln L_X(t) \leq \dfrac{1}{2}t^2$. Montrer que $\boxed{P(\langle S_n, \overrightarrow{v}\rangle \geq \lambda) \leq \exp\left(-\dfrac{\lambda^2}{2n}\right)}$.

c) [2 pts] (★) En déduire que

$$P(\|S_n\| \geq \lambda) \leq 2d \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2dn}\right)$$

Indication : Utiliser $\|S_n\|^2 = \sum_{k=1}^d \langle S_n, \overrightarrow{v_k}\rangle^2$, où $(\overrightarrow{v_1}, ..., \overrightarrow{v_d})$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^d$.

3) *Question supplémentaire* : Montrer que $(\ln L_X)''(t) \leq 1$. En déduire $\forall t \geq 0$, $\ln L_X(t) \leq \dfrac{1}{2}t^2$.