Interrogation n°19. Corrigé

Exercice A

1) a) Pour x fixé, on a $f(x-t)g(t) \ = O_{\pm\infty}(|g(t)|)$, donc $t \longmapsto f(x-t)g(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

L'égalité $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(x-u)\ du$ résulte du changement de variable affine $u = x-t$, (qui est C^1 et bijectif). En effet $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\ dt = -\int_{+\infty}^{-\infty} f(u)g(x-u)\ du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(x-u)\ du$.

b) Posons $F(x,t) = f(x-t)g(t)$. Ainsi, F est continue en x, intégrable en t.

Domination : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|F(x,t)| \leq \varphi(t) = M\,|g(t)|$, où $M = \sup|f|$. Et φ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

D'où la continuité de $f * g$ par le théorème de continuité des intégrales paramétrées.

2) Posons $F(x,t) = f(x-t)g(t)$. On a bien F est continue en $x \in \mathbb{R}$ et intégrable en t sur $[0,1]$.

Domination : Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Pour $(x,t) \in [a,b] \times [-1,1]$, $x-t$ appartient à $[a-1,b+1]$.

On a $\forall x \in [a,b]$, $\forall t \in [-1,1]$, $|F(x,t)| \leq \varphi(t) = M\,|g(t)|$, où $M = \sup_{[a-1,b+1]}|f|$. D'où le résultat.

3) Avec le changement de variable affine $t = ux$, on obtient $F(x) = x\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iux}\ du$.

Posons $g(x,t) = f(t)e^{itx}$. On a :

- Pour tout t, $x \longmapsto g(x,t)$ est de classe C^∞ et $\dfrac{\partial^n g}{\partial x^n}(x,t) = (it)^n f(t)e^{itx}$.
- On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x > 0$, $\left|\dfrac{\partial^n g}{\partial x^n}(x,t)\right| \leq \varphi_n(t) = t^n f(t)$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}$ car $\varphi_n(t) = O_{\pm\infty}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

Donc $x \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{itx}\ dt$ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$, et ainsi il en est de même de F.

Exercice B

1) Soit $x \in E_\lambda$. On a $a(b(x)) = b(a+\mathrm{Id})(x) = b(\lambda x + x) = (\lambda+1)b(x)$. Donc $b(x) \in E_{\lambda+1}$.

2) L'existence de X résulte du théorème de d'Alembert-Gauss : χ_A est scindé et $n \geq 1$.

3) Par 1), on a $\forall k \in \mathbb{N}$, $B^k X \in E_{\lambda+k}$.

Comme A admet un nombre fini de valeurs propres, alors $B^k X = 0$ pour k assez grand.

Donc il existe entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $B^p X = 0$, et donc un plus petit entier vérifiant cette propriété.

4) $X, BX, ..., B^{p-1}X$ sont non nuls, donc sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes. Donc $(X, BX, ..., B^{p-1}X)$ est libre, et F est stable par A (toute droite engendrée par un vecteur propre est stable).

On a $M = \mathrm{Mat}_\mathcal{B}\, a = \mathrm{Diag}(\lambda+p-1, ..., \lambda+1, \lambda)$ et $N = \mathrm{Mat}_\mathcal{B}\, b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ matrice nilpotente.

Remarque : Lorsque u est nilpotente et que $u^{p-1}(x) \neq \overrightarrow{0}$, on peut montrer de façon générale que la famille $(x, u(x), ..., u^{p-1}(x))$ est libre : on considère $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^k(x) = \overrightarrow{0}$, et on montre par récurrence forte que tous les α_k sont nuls (en composant par u^j bien choisi). Mais ici, il y a un argument plus simple.

5) On complète $\mathcal{B}$ en une base $\mathcal{C}$ de $E = \mathbb{C}^n$.

Alors $\mathrm{Mat}_C\, a = \left(\begin{array}{c|c} M & * \\ \hline O & A' \end{array}\right)$ et $\mathrm{Mat}_C\, b = \left(\begin{array}{c|c} N & * \\ \hline O & B' \end{array}\right)$.

Comme $ab - ba = b$, alors $A'B' - B'A' = B'$ (cf produits par blocs).

6) a) On raisonne par récurrence forte sur n. La propriété est immédiate pour $n = 0$.

Supposons vrai jusqu'au rang $(n-1)$. On applique l'hypothèse de récurrence à (A', B').

Il existe donc $Q \in GL_{n-p}(\mathbb{C})$ telle que $Q^{-1}A'Q$ triangulaire et $Q^{-1}B'Q$ nilpotente.

On conclut en considérant $P = \left(\begin{array}{c|c} I_p & O \\ \hline O & Q \end{array}\right) \in GL_n(\mathbb{C})$, et $P^{-1}\left(\begin{array}{c|c} M & * \\ \hline O & A' \end{array}\right)P$ et $P^{-1}\left(\begin{array}{c|c} N & * \\ \hline O & B' \end{array}\right)P$.

b) On a $A(B + I_n) = B(A + I_n)$, c'est-à-dire $AB - BA = B - A$.

En posant $B' = B - A$, on obtient $AB' - B'A = B'$. Ainsi, A et B' sont cotrigonalisables, donc A et B aussi.

Exercice C

1) a) Les matrices A et B sont symétriques réelles donc diagonalisables.

b) On a $\mathrm{Sp}(B) = \{-1, 1\}$, les sev propres sont $E_1 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $E_{-1} = (E_1)^\perp = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On choisit pour $P = (P_1, P_2)$ une BOND adaptée à $E_1 \oplus E_{-1} = \mathbb{R}^2$.

On peut donc prendre $P = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in O_2^+(\mathbb{R})$. On a alors $P^{--1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2) a) On a $AX = B$, donc $x_2 = \lambda x_1$ et $\forall j \in [\![2, n-1]\!]$, $x_{j-1} + x_{j+1} = \lambda x_j$ et $x_{n-1} = \lambda x_n$.

Donc $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $|\lambda x_j| \leq 2M$, où $M = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$.

Il existe $p \in [\![1, n]\!]$ tel que $|x_p| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$. Comme X n'est pas nul, $M = |x_p| > 0$.

On obtient donc $|\lambda|\, M \leq 2M$, c'est-à-dire $|\lambda| \leq 2$.

D'où l'existence de θ, car cos induit une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$.

b) On note que les x_i sont entièrement déterminés (par récurrence d'ordre 2) par x_1.

Donc l'application $E_\lambda \to \mathbb{R}\quad X \longmapsto x_1$ est injective. Ainsi, $\dim E_\lambda \leq 1$, et donc $\dim E_\lambda = 1$.

c) Ainsi, (x_i) est une suite récurrente d'ordre 2, d'équation caractéristique $1 - \lambda z + z^2 = 0$.

Les racines sont $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$.

Premier cas : $\theta \in \{0, \pi\}$.

Si $\theta = 0$, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tels que $x_j = (\alpha + \beta j)$. Comme $x_0 = x_{n+1} = 0$, alors $(\alpha, \beta) = (0, 0)$.

Ce qui est absurde car X non nul. De même si $\theta = \pi$, car on obtient $x_j = (\alpha + \beta j)(-1)^j$.

Second cas : $\theta \neq 0\ [\pi]$. Alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tels que $x_j = \alpha e^{ij\theta} + \beta e^{-ij\theta}$.

On a $x_0 = 0$, donc $\alpha + \beta = 0$, donc $\boxed{x_j = 2\alpha i \sin(j\theta)}$.

Comme $x_{n+1} = 0$, alors $2\alpha \sin((n+1)\theta) = 0$. Comme X non nul, α non nul, donc $(n+1)\theta \in \pi\mathbb{Z}$.

Donc il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $\lambda = 2\cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$.

c) Par b), $\lambda = 2\cos(\theta)$, avec $\theta = \dfrac{k\pi}{n+1}$ est bien valeur propre de vecteur propre $X = (\sin(j\theta))_{1 \leq j \leq n}$.

On a bien n valeurs propres disitnctes, et les sev prorpes sont bien donc de dimension 1.

Remarque : Si on admet le résultat de la question b) sans l'avoir résolue, on peut quand même déduire le spectre de B : en effet, on sait que B est diagonalisable et que les sev propres sont de dimension 1. Donc B admet n valeurs propres distinctes et ce sont *tous* les λ trouvés au b), car ils sont justement au nombre de n.

3) Il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}D^kP = \mathrm{Diag}((\lambda_i^k))_{1 \leq i \leq n}$ diagonale.

On pose $\|A\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} |a_{ij}|$ et $N(A) = \left\|P^{-1}AP\right\|_\infty$.

On a bien $N(B^k) = \left\|P^{-1}D^kP\right\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} \left|\lambda_i^k\right| = \rho(B^k) = \rho(B)^k$.

4) Les valeurs propres de A sont les $(1-2r) + \lambda r$ où $\lambda \in \mathrm{Sp}(B)$.

Comme A est diagonalisable, la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée ssi $\mathrm{Sp}(A) \in [-1, 1]$: on peut utiliser 3).

La CNS est donc $-1 \leq (1-2r) + \lambda_{\min} r$ et $(1-2r) + \lambda_{\max} r \leq 1$.

Or, lorsque n décrit $\mathbb{N}$, $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ décrit $]-2, 2[$. D'où la CNS : $-1 \leq (1-2r) - 2r$, c'est-à-dire $r \leq \dfrac{1}{2}$.