Interrogation n°19. *Barème sur 24 pts. Durée 1h45mn*

Exercice A. Produit de convolution

Les trois questions sont indépendantes

1) Soient des applications continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

On suppose que f est bornée sur $\mathbb{R}$ et que g est intégrable sur $\mathbb{R}$.

a) [1 pt] Justifier l'existence de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\, dt$ et montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\, dt$.

b) [2 pts] On pose $\boxed{(f * g) : x \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\, dt}$. Montrer que $(f * g)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2) [1.5 pt] Soient des applications continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et $g : [-1, 1] \to \mathbb{C}$.

En donnant seulement la propriété de domination, montrer que

$$(f * g) : x \longmapsto \int_{-1}^{1} f(x-t)g(t)\, dt$$

est continue sur $\mathbb{R}$.

3) [2 pts] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une application continue telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ t^n f(t) = O_{\pm\infty}(1)$.

On pose $\forall x > 0,\ F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\dfrac{t}{x}\right) e^{it}\, dt$. Montrer que F est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.

Exercice B. Exemple de coréduction

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient deux matrices A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB - BA = B$, c'est-à-dire $AB = B(A + I_n)$.

On note a et b les endomorphismes canoniquement associés à A et B.

1) [1 pt] On note $E_\lambda = \mathrm{Ker}(a - \lambda\, \mathrm{Id})$ le sev propre de a associé à λ. Montrer que $\boxed{b(E_\lambda) \subset E_{\lambda+1}}$.

2) [1 pt] Justifier l'existence d'un vecteur propre X de A. On note λ la valeur propre associée.

3) [1.5 pt] Montrer qu'il existe un plus petit $p \in \mathbb{N}$ tel que $B^p X = 0$.

4) [1.5 pt] On pose $F = \mathrm{Vect}(X, BX, ..., B^{p-1}X)$.

Montrer que $\mathcal{B} = (B^{p-1}X, ..., BX, X)$ est libre et que F est stable par A.

Expliciter sans justification les matrices des restrictions de a et b à F dans la base $\mathcal{B}$

5) [1.5 pt] Montrer qu'il existe $P \in GL_n(K)$, un entier $r \in \mathbb{N}^*$ et des matrices $M,\ N,\ A'$ et B' telles que

$$P^{-1}AP = \left(\begin{array}{c|c} M & * \\ \hline O & A' \end{array}\right) \quad \text{et} \quad P^{-1}BP = \left(\begin{array}{c|c} N & * \\ \hline O & B' \end{array}\right), \quad \text{avec} \begin{cases} M \text{ et } N \in \mathcal{M}_r(K) \\ N \text{ nilpotente} \\ A'B' - B'A' = B' \end{cases}$$

6) *Question hors-interrogation*

a) Montrer que A et B sont cotrigonalisables et que B est nilpotente.

b) On suppose $A(B + I_n) = B(A + I_n)$. Montrer que A et B sont cotrigonalisables.

$\boxed{\textbf{Exercice C. Matrice de Dirichlet}}$ (*extrait un peu modifié du sujet 1 Centrale PC 2018*)

Soit $n \geq 2$. On considère $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A = (1-2r)I_n + rB$, où $r > 0$.

1) a) [1 pt] Montrer que A et B sont diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) [1.5 pt] On prend $n = 2$. On a $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On note que $B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

En utilisant les sev propres, déterminer rapidement $P \in O_2^+(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}BP$ est diagonale.

2) Soit X un vecteur propre de B, et λ la valeur propre associée.

a) [1.5 pt] En considérant p tel que $|x_p| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$, montrer que $|\lambda| \leq 2$.

En déduire qu'il existe $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\boxed{\lambda = 2\cos\theta}$.

b) [1.5 pt] On pose $x_0 = x_{n+1} = 0$. On a ainsi $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $x_{j-1} - \lambda x_j + x_{j+1} = 0$.

Montrer que le sev propre E_λ est de dimension 1.

c) [2 pts] Montrer qu'il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $\lambda = 2\cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$.

Indication : Considérer les racines complexes de $1 - 2(\cos\theta)z + z^2$.

d) [2 pts] Montrer que le spectre de B est

$$\mathrm{Sp}(B) = \left\{ 2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right),\, k \in [\![1, n]\!] \right\}$$

et donner une base de vecteurs propres de B.

3) [1 pt] Soit $D \in GL_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable. On pose $\rho(D) = \sup\{|\lambda|,\, \lambda \in \mathrm{Sp}(D)\}$.

Donner sans justification une norme N sur $GL_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}$, $N(D^k) = \rho(D)^k$.

4) [1 pt] Donner une CNS sur r pour que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ soit bornée pour *toute* valeur de $n \in \mathbb{N}^*$.