Interrogation n°18 bis. Corrigé

Problème

1) a) On sait que toute application DSE sur $]-R,R[$ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$.

D'autre part, une combinaison linéaire de fonctions DSE sur sur $]-R,R[$ est aussi DSE.

De plus, l'application nulle appartient à $\mathcal{E}(R)$. Donc $\mathcal{E}(R)$ est bien un sev de $C^\infty(]-R,R[,\mathbb{R})$.

b) Soient $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $g : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ appartenant à $\mathcal{E}(R)$.

On a $\|f\|_r \geq 0$. Supposons $\|f\|_r = 0$. Comme $r > 0$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$, donc $f = 0$.

On a $\|f+g\|_r = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n + b_n| r^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} (|a_n| + |b_n|) r^n = \|f\|_r + \|g\|_r$.

Enfin, $\|\lambda f\|_r = \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda a_n| r^n = |\lambda| \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n = |\lambda| \|f\|_r$. Donc $f \longmapsto \|f\|_r$ est une norme.

C'est aussi une norme d'algèbre :

Par produit de Cauchy, $\|fg\|_r = \sum_{n=0}^{+\infty} |\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}| r^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} |a_k| |b_{n-k}| r^n = \|f\|_r \|g\|_r$.

2) a) On a $\sup_{]-r,r[} |f_n| \leq \sup_{x\in]-r,r[} \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| |x|^n = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n = \|f_n\|_r$.

Donc $\sum f_n$ converge normalement sur $]-r,r[$, donc simplement, et on pose $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

b) Montrons d'abord que $f \in \mathcal{E}(r)$. Posons $\forall x \in]-r,r[$, $f_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k} x^k$.

La famille $(a_{n,k} x^n)_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.

En effet, $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} |a_{n,k} x^k| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} |a_{n,k}| r^k = \sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_r < +\infty$.

Donc par Fubini, $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k} x^k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,k} x^k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} (\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,k}) x^k$.

Ainsi, f est bien DSE sur $]-r,r[$, c'est-à-dire $f \in \mathcal{E}(r)$.

On a $\|f - \sum_{k=0}^{n} f_k\|_r = \left\|\sum_{k=0}^{+\infty} f_k\right\|_r \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \|f_k\|_r \to 0$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Donc $\sum f_n$ converge vers f pour $\| \; \|_r$.

3) a) $\sum |a_n| x^n$ est une série entière de rayon R.

La fonction $x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| x^n$ est donc a fortiori continue sur $]-R,R[$, et vaut 0 en $x = 0$.

Donc il existe $\lambda > 0$ assez petit tel que $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \lambda^n \leq 1$.

b) La propriété est vraie au rang 0. Supposons la propriété vraie jusqu'au rang $(n-1)$.

Alors $|b_n| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |b_k a_{n-k}| \leq \dfrac{1}{\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{n-k} |a_{n-k}| \leq \dfrac{1}{\lambda^n} \sum_{j=0}^{+\infty} |a_j| \lambda^j \leq \dfrac{1}{\lambda^n}$.

On en déduit alors $\sum b_n x^n$ est de rayon $R' \geq \lambda > 0$.

c) Posons $\rho = \min(R, R') > 0$.

On a par produit de Cauchy, $\forall x \in]-\rho,\rho[$, $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n$.

Or, par définition de a_n, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 0$ et $a_0 b_0 = 1$. D'où le résultat.

d) Par c), on a $\forall x \in]-\rho,\rho[$, $\dfrac{1}{f(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Donc on peut prendre $r = \rho$.

4) a) Posons $P = MN$. On a $\forall (i,k) \in [\![1,p]\!]^2$, $P_{ik} = \sum_{j=1}^{p} M_{ij} N_{jk}$.

Comme les fonctions M_{ij} et N_{jk} appartiennent à $\mathcal{E}(R)$, alors par 1), la fonction P_{ik} appartient à $\mathcal{E}(R)$.

Et on a donc $\|P_{ik}\|_r \leq \sum_{j=1}^p \|M_{ij}\|_r \|N_{jk}\|_r$.

D'où $\sum_{k=1}^p \|P_{ik}\|_r \leq \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^p \|M_{ij}\|_r \|N_{jk}\|_r = \sum_{j=1}^p \left(\|M_{ij}\|_r \sum_{k=1}^p \|N_{jk}\|_r\right) \leq \sum_{j=1}^p \|M_{ij}\|_r |||N|||_r \leq |||M|||_r|||N|||_r$

On en déduit que $|||P|||_r \leq |||M|||_r|||N|||_r$.

b) On a notamment $\|M_{ij}\|_r \leq |||M|||_r$. On a donc $\|(M^n)_{ij}\|_r \leq |||M^n|||_r \leq |||M|||_r^n$ par a).

Donc les séries $\sum (M^n)_{ij}$ convergent au sens de 2), car la série $\sum \|(M^n)_{ij}\|_r$ converge.

Donc la série $\sum (M^n(x))_{ij}$ converge..

Ainsi, la série de matrices $\sum M(x)^n$ converge dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, par convergence des suites des coefficients.

On pose $N(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} M(x)^n$. Pour $|x| < r$, on a $\left(\sum_{k=0}^n M(x)^k\right)(I_p - M(x)) = I_p - M(x)^{n+1}$.

Comme $\left|M(x)_{ij}^{n+1}\right| \leq \left\|(M^{n+1})_{ij}\right\|_r \leq |||M^{n+1}||| \ \to 0$, alors par passage à la limite.

Remarque : Au lieu de raisonner par coefficients, on pourrait aussi utiliser $N(M(x)) \leq |||M|||_r$.

c) Chaque coefficient $N_{ij}(x)$ est somme d'une série de fonctions qui convergent pour $||| \ |||_r$ dans $\mathcal{E}(r)$

En effet, $N_{ij}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (M^n)_{ij}(x)$ et on peut appliquer 2) car $\sum_{n=0}^{+\infty} \left\|(M^n)_{ij}\right\|_r \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |||M^n|||_r \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |||M|||_r^n <$ $+\infty$.

Exercices

1) a) On suppose f continue vérifiant (E_λ). Alors $x \longmapsto \int_0^x f(t)\,dt$ est de classe C^1, donc f est C^1.

En dérivant, on obtient $(F) : f'(x) - \lambda f(x) = e^x$.

b) *Remarque* : f vérifie (E_λ) ssi $f(0) = 1$ et f vérifie (F).

En effet, deux fonctions sont égales ssi elles ont même dérivée et même valeur en 0.

On résout (F) par la méthode de variation de la constante.

En posant $f(x) = z(x)e^{\lambda x}$, (F) s'écrit $z'(x)e^{\lambda x} = e^x$, c'est-à-dire $z'(x) = e^{(1-\lambda)x}$.

- Lorsque $\lambda = 1$ (résonance), on obtient $f(x) = (x+k)e^x$. On a alors $f(0) = 1$ ssi $k = 1$.

Donc l'unique solution de (E_1) est $f(x) = (x+1)e^x$

- Lorsque $\lambda \neq 1$, on obtient $f(x) = \left(\dfrac{1}{1-\lambda}e^{(1-\lambda)x} + k\right)e^{\lambda x} = \dfrac{e^x}{1-\lambda} + ke^{\lambda x}$.

On a alors $f(0) = 1$ ssi $\dfrac{1}{1-\lambda} + k = 1$, c'est-à-dire $k = \dfrac{-\lambda}{1-\lambda}$.

2) a) Posons $K = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq f(0)\}$.

K est non vide car $0 \in K$, fermé car f est continue et borné car $\lim_{+\infty} f = \lim_{-\infty} = +\infty$.

Donc f atteint son minimum sur K. On pose $m = \inf_K f$.

On a alors $\forall x \notin K$, $f(x) \geq f(0) \geq m$. On en déduit que $m = \inf_{\mathbb{R}} f$.

Pour conclure, il suffit de prouver que Δ est convexe.

On peut aussi procéder directement : Posons $\alpha = \inf \Delta$ et $\beta = \sup \Delta$, qui existent, car Δ borné non vide.

Par continuité de f, on a $f(\alpha) = f(\beta) = m$.

Comme f est convexe, le graphe de f est au-dessous de ses cordes, donc $\forall x \in [\alpha, \beta]$, $f(x) \leq m$.

Par définition de m, on a donc $\in [\alpha, \beta]$, $f(x) = m$, donc $\Delta = [\alpha, \beta]$.

b) *Remarque* : $x \longmapsto |x|$ est convexe, donc f est convexe comme somme de fonctions convexes.

L'application f est continue et affine par morceaux, associée à la subdivision $(-\infty, a, b, c, d, +\infty)$, et les pentes respectives de f sur les intervalles de la subdivision valent -4, -2, 0, 2 et 4. Donc $\Delta = [b, c]$.

3) a) L'idée est d'écrire x comme valeur moyenne de a et b.

On écrit $x = \lambda a + (1 - \lambda)b$, et ainsi $\lambda = \dfrac{b - x}{b - a}$.

On a donc $\forall x \in [a, b]$, $\exp(tx) \leq \dfrac{b - x}{b - a} \exp(ta) + \dfrac{x - a}{b - a} \exp(tb)$. Donc $e^{tX} \leq \dfrac{b - x}{b - a} e^{ta} + \dfrac{x - a}{b - a} e^{tb}$.

En passant à l'espérance et sachant que $E(X) = 0$, on obtient $E(e^{tX}) \leq \dfrac{b}{b - a} e^{ta} - \dfrac{a}{b - a} e^{tb}$.

Remarque : On a toujours $be^{ta} - ae^{tb} \geq 0$.

b) L'application $f : t \longmapsto E(e^{tX})$ est C^∞, et on a $f(0) = 1$, $f'(0) = E(X) = 0$ et $f''(0) = E(X^2)$.

Donc $E(e^{tX}) = 1 + \dfrac{1}{2} E(X^2) t^2 + \mathfrak{o}\,(t^2)$.

On a aussi par un DL : $\dfrac{b}{b - a} e^{ta} - \dfrac{a}{b - a} e^{tb} = 1 + \dfrac{(ba^2 - ab^2)}{2(b - a)} t^2 + \mathfrak{o}\,(t^2) = 1 - ab \dfrac{t^2}{2} + \mathfrak{o}\,(t^2)$.

On a ainsi $E(X^2) t^2 \leq abt^2 + \mathfrak{o}\,(t^2)$, donc $E(X^2) \leq -ab$.

Remarque : On ne peut pas dériver les inégalités ; c'est pourquoi on passe par un DL.

c) La variable aléatoire X est à valeurs dans $[a, b]$, donc $(X - a)(X - b) \leq 0$.

On a ainsi $X^2 \leq ab - (a + b)X$. En passant à l'espérance, on obtient $E(X^2) \leq -ab$.