Interrogation n°18 bis. *Barème sur 25.5 pts. Durée 1h30mn*

Problème (*extrait de X MP 2023*)

Pour $R > 0$, on note $\mathcal{E}(R)$ l'ensemble des fonctions DSE sur $]-R, R[$ et à valeurs réelles, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions $f :]-R, R[\to \mathbb{R}$ et pour lesquelles il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall x \in]-R, R[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Pour $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ appartenant à $\mathcal{E}(R)$ et pour $0 < r < R$, on pose $\boxed{\|f\|_r = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|\, r^n}$.

1) a) [1 pt] Justifier (*en deux ou trois lignes*) que $\mathcal{E}(R)$ est un sev de $C^\infty(]-R, R[, \mathbb{R})$.

b) [2.5 pts] Soit $0 < r < R$. Montrer que $\| \ \|_r$ est une norme sur $\mathcal{E}(R)$, et que $\|fg\|_r \leq \|f\|_r \|g\|_r$.

2) Soit $0 < r < R$. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{E}(R)$, et que $\sum \|f_n\|_r$ converge.

a) [1 pt] Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $]-r, r[$ vers une fonction f.

b) [2 pts] Montrer que $f \in \mathcal{E}(r)$ et que la série $\sum f_n$ converge vers f pour la norme $\| \ \|_r$,

Indication : Utiliser les familles sommables et le théorème de Fubini.

3) Soit $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \in \mathcal{E}(R)$ telle que $f(0) = 1$.

a) [1 pt] Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $\sum_{n=\mathbf{1}}^{+\infty} |a_n|\, \lambda^n \leq 1$.

b) [2 pts] On considère la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$b_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \ b_n = -\sum_{k=0}^{n-1} b_k a_{n-k}$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|b_n| \leq \dfrac{1}{\lambda^n}$.

c) [1.5 pt] En déduire qu'il existe $\rho > 0$ tel que $\forall x \in]-\rho, \rho[$, $\left(\sum_{n=\mathbf{0}}^{+\infty} a_n x^n\right) \left(\sum_{n=\mathbf{0}}^{+\infty} b_n x^n\right) = 1$.

d) [1 pt] Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $g : x \longmapsto \dfrac{1}{f(x)}$ appartient à $\mathcal{E}(r)$.

4) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On sait (*admis ici*) que $N(A) = \max_{1\leq i\leq p} \sum_{j=1}^{p} |a_{ij}|$ est une norme sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Pour $R > 0$, on note $\mathcal{M}(R)$ les fonctions $M :]-R, R[\to \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telles que $\forall (i, j) \in [\![1, p]\!]^2$, $M_{ij} \in \mathcal{E}(R)$.

Autrement dit, il s'agit des fonctions à valeurs matricielles dont les coefficients M_{ij} sont DSE sur $]-R, R[$.

Pour $0 < r < R$ et $M \in \mathcal{M}(R)$, on pose $\boxed{|||M|||_r = \max_{1\leq i\leq p} \sum_{j=1}^{p} \|M_{ij}\|_r}$.

On vérifie (*admis ici*) que $M \longmapsto |||M|||_r$ est une norme (appelée norme triple) sur le sev $\mathcal{M}(R)$.

a) [2 pts] Soient M et $N \in \mathcal{M}(R)$. Pour $x \in]-R, R[$, on pose $(MN)(x) = M(x)N(x)$.

Soit $0 < r < R$. Montrer que $MN \in \mathcal{M}(R)$ et que $|||MN|||_r \leq |||M|||_r|||N|||_r$.

b) [2 pts] Soit $M \in \mathcal{M}(R)$ et $0 < r < R$. On suppose $|||M|||_r < 1$.

Soit $x \in]-r, r[$. Montrer que la série de matrices $\sum M(x)^n$ converge dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$,

et que la matrice $N(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} M(x)^n$ est l'inverse de la matrice $I_p - M(x)$.

c) [1.5 pt] Avec les notations de b), montrer que $N \in \mathcal{M}(r)$.

Exercices

1) [3 pts] (*extrait X PC 2010*)

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. On considère l'équation intégrale $(E) : f(x) - \lambda \int_0^x f(t)\, dt = e^x$.

a) Montrer que si f vérifie (E), alors f vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

b) En déduire les solutions de (E).

2) [3 pts]

a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe continue vérifiant $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Montrer que $\Delta = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = \inf f\}$ est un segment non vide.

Indication : On pose $K = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq f(0)$. Montrer d'abord qu'il existe $m = \min_K f$ et que $\inf_{\mathbb{R}} f = m$.

b) Soient quatre réels $a < b < c < d$. On considère $f(x) = |x - a| + |x - b| + |x - c| + |x - d|$.

Sans justifier votre réponse, représenter l'allure du graphe de f et expliciter Δ.

3) ($\bigstar$) Soient des réels $a \leq b$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[a, b]$ telle que $\boxed{E(X) = 0}$.

a) [1.5 pt] Soit $t \in \mathbb{R}$. En utilisant une inégalité de convexité, montrer que

$$E(e^{tX}) \leq \frac{be^{ta} - ae^{tb}}{b - a}$$

b) [0.5 pt] En déduire que $E(X^2) \leq -ab$.

c) [0.5 pt] Donner une preuve directe de b).